BANACH代数与谱论

高枚／编



北京师范大学出版社

BANACH 代数与谱论

高 校 编

北京师范大学出版社

BANACH 代数与谱论

高 校 编

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：6.75 字数：163千
1991年1月第1版 1991年1月第1次印刷
印数：1—1 000

ISBN7-303-01050-5/O·138
定 价：1.90 元

内 容 简 介

本书共4章．第1章介绍Banach代数的基本理论，并讨论了以谱映射定理为中心的谱的基本性质；第2章介绍Гельфанд理论和有对合的Banach代数；第3章研究算子理论中的一个重要的C^*-代数，即Hilbert空间H上的全体有界线性算子所构成的Banach代数$\mathscr{B}(H)$，重点是$\mathscr{B}(H)$的有界正规算子的谱分解；第4章主要是将谱分解推广到无界的正规算子．

本书可用作高等学校数学专业泛函分析课程的教学参考书．

前　　言

关于Banach代数与谱论，国内外已有很多权威著作。编者所想的是，如能增添一本用中文写成的入门读物，对于数学专业的学生来说，也许并非完全多余。团此，我们以 Walter Rudin 的《Functional Analysis》一书的最后四章为基础，参照关肇直、田方增；M.A.Наймарк；C.E.Rickart等名家著作，进行加工，编写成此书。希望它能帮助读者对这一数学分支有一个粗略的了解。

阅读本书需要一定的基础知识。我们假定读者学习过分析学（解析函数论，实变函数论，泛函分析），代数学与拓扑学。但是，考虑到理解一些重要概念时应当有共同语言，故在书末另列附录，收入若干名词，术语和定理。建议读者先浏览一遍，涉及到时可随手查阅。附录中列出的定理大都是书中引用较多的。它们的证明一律省略，因为读者很容易从有关的专著中找到。至于现已通用的符号和名词，我们都直接采用而不作解释。这样做，为的是能压缩全书篇幅，并使文字较为简洁。

编者学识谫陋，书中谬误及不妥之处在所难免，希望能够得到专家和读者的指正。

最后，编者谨向河北省教委周治华主任、北京师范大学刘绍学教授和孙永生教授、华东师范大学张奠宙教授、以及自己的同事和亲属任槐林、谢诟、杜存义、荆崇恩等同志表示衷心的感谢，由于得到他们的理解和支持，特别是河北省教委的资助，这本书才得以问世。

高　枚

1990年3月

目 录

第1章　Banach代数

这一章的内容对于全书来说是最基本的，它勾画出今后将要讨论的问题的一个大致的轮廓．其中，向量值函数的积分和符号运算是为研究方法做的必要准备，希望读者给予足够的重视．由于谱理论涉及的是不可逆元，而为了认识事物的全貌，还应当考虑可逆元，因此最后一节专门讨论可逆元群的构造．

1.1 Banach代数的定义·例

1.1.1 定义

代数　集合A称为数域$\boldsymbol{K}$上的一个代数，如果A是$\boldsymbol{K}$上的一个向量空间，它的元素之间定义了一个乘法，即，对应于任何x, $y\in A$，有唯一的乘积$xy\in A$；而且，这个乘法运算对任何x, $y,z\in A$与任何$\alpha\in\boldsymbol{K}$，满足以下条件：

（1）　　$x(yz)=(xy)z$；

（2）　　$x(y+z)=xy+xz$,　　$(x+y)z=xz+yz$；

（3）　　$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$.

当数域$\boldsymbol{K}$是复数域$\boldsymbol{C}$时，A特称为**复代数**．

代数A称为**交换代数**，如果A内任何二个元素x,y，它们的乘积满足条件

（4）　　$xy=yx$.

代数A如果有这样一个元素，记作e，它与任何$x\in A$作成的乘积满足条件

（5）　　$xe=ex=x$,

则称e为代数A的一个**单位元**．

显然，至多有一个单位元$e\in A$满足（5）式．因为，假如另

有$e' \in A$也满足（5）式，则可得出 $e'=e'e=e$。

赋范代数 代数A称为赋范代数，如果A同时又是一个赋范向量空间，而且任二元素的乘积的范数满足乘法不等式

（6） $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$.

于是，在赋范代数内，乘法运算是连续的. 因为，当$x_n \to x$，$y_n \to y$时，由恒等式

（7） $x_n y_n - xy = (x_n - x) y_n + x(y_n - y)$

可以得出

（8） $x_n y_n \to xy$.

显然，（8）式蕴涵乘法运算既是左连续的，又是右连续的这两个特款。

赋范代数A如果不是$\{0\}$，它又有单位元e，那么，由$\|e\| = \|e^2\| \leqslant \|e\|^2$立即得出

（9） $\|e\| \geqslant 1$.

Banach 代数 赋范代数A如果作为赋范空间是完备的，它又有单位元e，而且$\|e\|=1$，则A称为Banach代数。

交换Banach代数（赋范环） Banach代数A如果又是交换代数，则A称为交换Banach代数。

有些专著，将我们在此定义的交换Banach代数称为赋范环(Normed Ring)。

1.1.2 评注

1．应当指出，在定义Banach代数A时，可以略去单位元的存在。有的作者正是这样做的。但是，涉及到逆的概念时，有单位元会更方便。特别是，A的元素的谱将能用比较自然的形式来定义。何况，事先规定有一个单位元，既能行文简洁，也不会影响到一般性。因为，许多实际问题中出现的Banach代数，都有单位元。即使没有“自然的”单位元，也能按照下述方法“人工地”添加上一个单位元。

假定A满足定义1.1.1中的条件（1）至（3）以及（6），但是没有单位元。设A_1由一切有序偶(x, α)组成，其中$x \in A$，

$\alpha \in \boldsymbol{K}$。在$A_1$中任二元素（$x,\alpha$）与（$y,\beta$）的乘积定义为

$$(x,\alpha)(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta),$$

再定义范数

$$\|(x,\alpha)\|=\|x\|+|\alpha|.$$

这时，$e=(0,1)$ 就是A_1的单位元。

容易验证A_1是一个合乎定义1.1.1的Banach代数；映射 $x\to(x,0)$ 是A到A_1的一个子空间上的一个等距同构。

如果将x与（$x,0$）看成相同的元，那么，A_1就是A再加上由$e=(0,1)$生成的一维向量空间。换句话说，我们可以将A放进一个更大的集合A_1中去讨论，而无须对它原先定义的乘积、范数作任何实质性的修改．但是，这个A_1有一个单位元。

2．读者还可以从定义1.1.1看出，所谓Banach代数，乃是一个集合A，它满足以下三个条件：

（i）A是一个代数，有单位元e；

（ii）A是一个Banach空间且$\|e\|=1$

（iii）赋予A的范数满足乘法不等式。

下面的决理1.1.3将要指出，条件（iii）可以换成“乘法是左连续的和右连续的”这种较弱的形式。

1.1.3定理 如果Banach空间A又是一个有单位元$e\neq0$的复代数，其中定义的乘法是左连续的和右连续的，那么，可以赋予A另一个范数，它诱出与给定的拓扑完全相同的拓扑，并且使A成为一个 Banach 代数。

证 题设$e\neq0$是为了不去赘述$A=\{0\}$这种最简单的特款。

我们先对每个$x\in A$定义左乘法算子M_x：

（1） $M_x(z)=xz \qquad (z\in A)$.

设$\tilde{A}$为全体M_x的集，$\mathscr{B}(A)$为A上全体有界线性算子的Banach空间，取算子范数，故恒等算子I的范数$\|I\|=1$。因为按题设乘法是左连续的和右连续的，所以$\tilde{A}\subset\mathscr{B}(A)$。

显然映射$x\mapsto M_x$是线性的，结合律蕴涵$M_{xy}=M_xM_y$。

任取$x\in A$，则有

(2) $\|x\|=\|xe\|=\|M_x(e)\|\leqslant\|M_x\|\ \|e\|$.

这些事实说明映射$x\mapsto M_x$是A到$\tilde{A}$上的一个同构，而且其逆映射是连续的。

因为有

(3) $\|M_xM_y\|\leqslant\|M_x\|\ \|M_y\|$,

(4) $\|M_e\|=\|I\|=1$,

欲证$\tilde{A}$是一个 Banach 代数，只须求证它是完备的，亦即，按照算子的范数给出的拓扑，$\tilde{A}$是$\mathscr{B}(A)$的闭子空间。而且，一旦此事得到证明，由开映射定理将推知映射$x\mapsto M_x$连续，$\|x\|$与$\|M_x\|$是A上的两个等价范数。

设$T\in\mathscr{B}(A)$，$T_i\in\tilde{A}$，又按照$\mathscr{B}(A)$的拓扑$T_i\to T$。如果T_i是左乘以$x_i\in A$，那么

(5) $T_i(y)=x_iy=(x_ie)y=T_i(e)y \qquad (y\in A)$.

当$i\to\infty$时，将有$T_i(y)=T(y)$；$T_i(e)\to T(e)$。因为题设乘法在A内是左连续的，所以（5）式右端那一项将趋向$T(e)y$.

记$x=T(e)$。于是，在$i\to\infty$时将有

(6) $T(y)=T(e)y=xy=M_xy \qquad (y\in A)$.

这就得出$T=M_x\in\tilde{A}$，因此$\tilde{A}$是闭集。 □

1.1.4 Banach代数的例

例1. 复数域$\boldsymbol{C}$，按照通常的加法和乘法是一个交换 Banach 代数。$x\in\boldsymbol{C}$的范数为$\|x\|=|x|$。这里定义范数是乘法的，即$\|xy\|=\|x\|\ \|y\|$。单位元是数 1。

实数域$\boldsymbol{R}$就其通常的结构来说，是一个实交换 Banach 代数。单位元也是数 1。

在此，我们注意到$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{C}$的一个子代数，它与$\boldsymbol{C}$有相同的单位元。

更有意义的是，我们还可以将$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{C}$都视为下述矩阵代数的特款。

用M^n表示a_{ij}是复数的$n\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的全体所成的集。

如果定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),$$

$$\lambda A=(\lambda a_{ij}),\quad \lambda\in \boldsymbol{C},$$

那么M^n将成为一个复线性空间．通常的矩阵的乘法

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

使M^n成为一个代数．众所周知，矩阵的乘法是不可交换的．

矩阵$I=(\delta_{ij})$，$\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$ $(i\neq j)$，是M^n的单位元．

定义

$$\|A\|=\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|:1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

将使M^n成为一个赋范代数．容易证明，按照这个范数，M^n是完备的．因此，M^n是一个Banach代数．

例2． $\boldsymbol{R}^2$是一个实交换Banach代数．其中的线性运算按照坐标去做．再对于$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$定义乘法

$$xy=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1),$$

以及范数$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$．容易验证$\|xy\|=\|x\|\ \|y\|$．单位元是（1，0）．

例3． 设$C(K)$为非空紧Hausdorff空间K上的全体复连续函数构成的Banach空间，赋予的是上确界范数，乘法定义为

$$(fg)(p)=f(p)g(p)\qquad (p\in K).$$

这时，有

$$\|fg\|=\sup|f(p)g(p)|\leqslant\sup|f(p)|\cdot\sup|g(p)|$$
$$=\|f\|\ \|g\|.$$

常值函数1可作单位元．因此$C(K)$是一个交换Banach代数．

有一个经常遇见的特款．当$K=[0,1]$时，$C[0,1]$作为区间$[0,1]$上全体复连续函数构成的Banach空间，也是一个交换Banach代数．

还有，如果K是仅含n个点的有限集，那么$C(K)$其实就是

$\boldsymbol{C}^n$，其中的乘法按照坐标去做．当 $n=1$ 时，则化为最简单的特款$\boldsymbol{C}$。

例4．设A为Banach空间．这时，由A上的全体有界线性算子构成的代数$\mathscr{B}(A)$是一个 Banach 代数，赋予通常的算子范数，恒等算子I是它的单位元。

如果 $\dim A=n<\infty$，那么$\mathscr{B}(A)$同构于矩阵代数M^n．只要，$\dim A=n>1$，那么$\mathscr{B}(A)$就是不可交换的。当然，平凡空间$A=\{0\}$应予排除。

例5．如果K是$\boldsymbol{C}$或$\boldsymbol{C}^n$的一个非空子集，而A是由那些在K的内部全纯的函数$f\in C(K)$构成的$C(K)$的一个子代数（参看前面的例3），A对于所赋予的上确界范数来说是完备的，因此A是一个Banach代数。

当K取的是$\boldsymbol{C}$内的闭单位圆盘$|z|\leqslant 1$时，上述的A将特称为**圆盘（disc）代数**．我们来验证其完备性．

设$\{f_n\}$是A中的一个Cauchy 序列，那么，对任何z，$|z|\leqslant 1$；$\{f_n(z)\}$将是$\boldsymbol{C}$中的Cauchy序列．因此，$n\to\infty$时，$f_n(z)\to f(z)$在$|z|\leqslant 1$上的收敛是一致的，于是f在$|z|\leqslant 1$上连续。然后，在$|z|<1$内任意取一条简单闭曲线Γ，由于$f_n(z)\to f(z)$在Γ上是一致收敛，应当有

$$(1)\qquad \lim_n \int_\Gamma f_n(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz.$$

根据解析函数论中的 Cauchy 定理，（1）式左端的每个积分都等于零，因此恒有

$$(2)\qquad \int_\Gamma f(z)dz=0.$$

再应用 Morera 定理，得知f是在$|z|<1$上、亦即在闭单位圆盘的内部全纯的函数。所以$f\in A$。

例6．设$L^1(\boldsymbol{R})$为定义在实数轴上的全体复值 Lebesgue 可积函数构成的 Banach 空间。鉴于两个可积函数的点态乘法所得到的第三个函数未必可积，因此、我们在$L^1(\boldsymbol{R})$中将定义新的乘法：

卷积，记作*；它规定，对于$f,g\in L^1(\boldsymbol{R})$，

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)ds.$$

应用积分理论中的Fubini定理，可以验证：对于任何f，$g\in L^1(\mathbf{R})$，$f*g$都有意义，因而$f*g\in L^1(\boldsymbol{R})$；以及$\|f*g\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$和乘法服从结合律．但是，这时$L^1(\boldsymbol{R})$没有单位元．（详见〔2〕）．按照本书的规定，必须经过评注1.1.2中所说的过程添加单位元之后，$L^1(\boldsymbol{R})$才能成为一个Banach代数．

容易将$L^1(\boldsymbol{R})$推广为$L^1(\boldsymbol{R}^n)$．

还可以再将$L^1(\boldsymbol{R}^n)$扩大为来自$\boldsymbol{R}^n$上形为

$$d\mu=fdm_n+\lambda d\delta$$

的全体复Borel测度构成的代数，其中$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\delta$是$\boldsymbol{R}^n$上的Dirac测度，$\lambda$为纯量．

例7． 设$M(\boldsymbol{R}^n)$是$\mathbf{R}^n$上全体复Borel测度构成的代数，其乘法为卷积，以全变差作为范数．这是一个交换Banach代数，单位元是δ．于是，$L^1(\boldsymbol{R}^n)$是$M(\boldsymbol{R}^n)$的一个闭子代数．

1.1.5 评注

作为§1.1的结束语，我们指出，今后主要是研究复数域上的Banach代数．如果没有另作声明，本书提到的Banach代数都是复Banach代数．至于实数域上的Banach代数——前面举例时已简称为实Banach代数，往往只是附带地提到．因为，本书的核心内容之一，是将复变函数中的全纯函数的理论移植过来，建立起A-值函数的积分概念和符号运算的方法．另外，复数域$\boldsymbol{C}$中有极其自然的非平凡的**对合**（定义见§2.3.1），即共轭．也可以说，正是从复数的共轭衍生出对合的概念．而揭示某些类型的Banach代数的许多深刻的性质，将取决于对合的存在．到了第3章，我们就能看到，复Hilbert空间的理论要比实Hilbert空间的理论更加丰富多采．即使在本章的一些问题中，细心的读者也能察觉到，$\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{R}$之间的拓扑上的差异往往有重要的影响．

1.2 同态与同构

1.2.1 定义

同态 两个代数A,B之间的一个映射$\phi: A\to B$称为同态映射，如果对于任何$x, y\in A$以及纯量λ, μ，恒有

（1） $\phi(\lambda x+\mu y)=\lambda\phi(x)+\mu\phi(y)$,

（2） $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.

复同态 复代数A到复数域$\mathbf{C}$上不恒等于零的同态$\phi: A\to\mathbf{C}$特称为复同态

因此，所谓复同态乃是复代数A上的一个线性泛函ϕ，对于任何$x, y\in A$，都有

$$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y).$$

同构 两个代数之间的一个双射同态称为一个同构.

可逆元 在任一有单位元e的代数A，元素$x\in A$称为一个可逆元，如果在A中有一个元素y，能使

$$yx=xy=e$$

成立。这时y称为x的**逆元素**，并且另外记y为x^{-1}。

容易验证，如果$x\in A$有逆元素，则其逆元素是唯一的。因为，假如$y, z\in A$皆为x的逆元素，则有$yx=e=xz$，于是

$$y=ye=y(xz)=(yx)z=ez=z.$$

可除代数 如果在一个有单位元的代数A中，每个非零元素都是可逆元，那么A称为可除代数。

1.2.2 命题 如果ϕ是有单位元e的复代数A上的一个复同态，那么$\phi(e)=1$，而且对于每个可逆元$x\in A$都有$\phi(x)\neq 0$。

证 因为在定义复同态时，我们曾约定ϕ不恒等于零。所以总会有$y\in A$使$\phi(y)\neq 0$。这时

$$\phi(y)=\phi(ye)=\phi(y)\phi(e),$$

从而得到$\phi(e)=1$。

任取可逆元$x\in A$，则

$$\phi(x)\phi(x^{-1})=\phi(xx^{-1})=\phi(e)=1,$$

因此 $\phi(x)\neq 0$。

当我们得出定理1.2.5以后，再回过头来看看命题1.2.2时，将能更清楚地了解复同态是一些具有什么样的特征的线性泛函。但是，在这之前，还必须做些准备工作。其实，定理1.2.3也是十分重要的。它大概是Banach代数理论中，最为广泛引用的一个基本定理。其中的(c)蕴涵Banach代数的一切复同态都是连续的。

1.2.3 定理 设A为Banach代数，$x\in A$，$\|x\|<1$。这时，有以下结论：

(a) $e-x$是可逆元；

(b) $\|(e-x)^{-1}-e-x\|\leqslant\dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$；

(c) 对于A上的每个复同态来说，都有$|\phi(x)|<1$。

证 由于$\|x^n\|\leqslant\|x\|^n$以及$\|x\|<1$，诸元素

$$(1)\qquad s_n=e+x+x^2+\cdots+x^n$$

构成A内的一个Cauchy序列。因为A是完备空间，所以存在这样的$s\in A$，$\lim\limits_n s_n=s$。又因$\lim\limits_n x^n=0$，乘法是连续的，当$n\to\infty$时将由

$$(2)\qquad s_n\cdot(e-x)=e-x^{n+1}=(e-x)\cdot s_n$$

得到

$$(3)\qquad s\cdot(e-x)=e=(e-x)\cdot s.$$

这就是说，s是$e-x$的逆元素。

接下来，利用（1）式即可推出

$$(4)\qquad \|(e-x)^{-1}-e-x\|=\|s-e-x\|=\|x^2+\cdots+x^n+\cdots\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n\leqslant\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

最后，设$\lambda\in\boldsymbol{C}$，$|\lambda|\geqslant 1$。由(a)知$e-\lambda^{-1}x$是可逆元。根据命题1.2.2，对于A上的任一复同态ϕ，都有

$$\phi(e-\lambda^{-1}x)=1-\lambda^{-1}\phi(x)\neq 0,$$

因此 $\phi(x)\neq\lambda$。 □

1.2.4 引理 如果f是一元复变函数当中的一个整函数，且有$f(0)=1$，$f'(0)=0$以及

(1) $$0<|f(\lambda)|\leqslant e^{|\lambda|} \qquad (\lambda\in\boldsymbol{C}),$$

那么，对于任何$\lambda\in\boldsymbol{C}$，都有$f(\lambda)=1$。

证 由于f没有零点，所以另有一个整函数g，使

$$f=\exp\{g\},g(0)=g'(0)=0.$$

而且，由条件（1）可知$\mathrm{Re}[g(\ )]\leqslant|\lambda|$。这个不等式蕴涵

(2) $$|g(\lambda)|\leqslant|2r-g(\lambda)| \qquad (|\lambda|\leqslant r).$$

函数

(3) $$h_r(\lambda)=\frac{r^2g(\lambda)}{\lambda^2[2r-g(\lambda)]}$$

在$\{\lambda:|\lambda|<2r\}$内全纯，并且在$|\lambda|=r$上有$|h_r(\lambda)|\leqslant1$. 根据最大模定理，应有

(4) $$|h_r(\lambda)|\leqslant1 \qquad (|\lambda|\leqslant r).$$

固决λ，让$r\to\infty$，这时(3)式和(4)式蕴涵$g(\lambda)=0$. □

1.2.5 定理 (Gleason, Kahane, Zelazko) 如果ϕ是Banach代数A上的一个线性泛函，有$\phi(e)=1$，又对于每个可逆元$x\in A$都有$\phi(x)\neq0$，那么

(1) $$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y) \qquad (x,y\in A).$$

换句话说，这时ϕ是一个复同态。

（值得注意的是，我们无须假设ϕ的连续性.）

证 设N为ϕ的零空间. 这时$x,y\in A$可以表示为

(2) $$x=a+\phi(x)e, y=b+\phi(y)e,$$

其中$a,b\in N$。再将ϕ应用于（2）的两个方程的乘积，得到

(3) $\phi(xy)=\phi(ab)+\phi(x)\phi(y)$。于是，如果能够证明命题

(4) $$a\in N, b\in N\Longrightarrow ab\in N$$

成立，就将得到结论（1）.

我们来看，假决已经证明（4）的特款

(5) $$a\in N\Longrightarrow a^2\in N$$

成立，那么在（3）式中让$x=y$，将有

(6) $\qquad \phi(x^2)=[\phi(x)]^2 \qquad (x\in A)$。

这时，在（6）式中以$x+y$取代x，则导致

(7) $\qquad \phi(xy+yx)=2\phi(x)\phi(y) \qquad (x,y\in A)$。

从而有

(8) $\qquad x\in N, y\in A \Longrightarrow xy+yx\in N$。

考虑到有恒式等

(9) $\qquad (xy-yx)^2+(xy+yx)^2=2[x(yxy)+(yxy)x]$，

如果$x\in N$，那么，由命题（8）可知（9）式的右端应当在N内；又由命题（8）及（6）式推知$(xy+yx)^2$也在N内，因而$(xy-yx)^2$在N内。这时，再应用（6）式，就得知命题

(10) $\qquad x\in N, y\in A \Longrightarrow xy-yx\in N$

成立。然后将这个命题的结论与命题（8）的结论合并，立即看出命题（4）正确，于是（1）式得以成立。

以上的分析表明，出于代数方面的原因，命题（5）蕴涵（1）式。下面我们将转而求证命题（5），一旦完成，定理也就得到了证明。

根据题设，N不含有A的可逆元。因而，由定理1.2.3的(a)可知，对于每个$x\in N$．都有$\|e-x\|\geqslant 1$。于是

(11) $\qquad \|\lambda e-x\|\geqslant|\lambda|=|\phi(\lambda e-x)| \qquad (x\in N,\lambda\in \mathbf{C})$。

这样，我们知道ϕ是A上的一个连续线性泛函，范数等于1。

为了求证命题（5），先固定$a\in N$，并且可以不失一般性地假设$\|a\|=1$。定义

(12) $$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(a^n)}{n!}\lambda^n \qquad (\lambda\in \mathbf{C}).$$

由于$|\phi(a^n)|\leqslant\|a^n\|\leqslant\|a\|^n=1$，因此$f$是整函数，而且对于一切$\lambda\in\mathbf{C}$，都有$|f(\lambda)|\leqslant\exp|\lambda|$。还有$f(0)=\phi(e)=1$，以及$f'(0)=\phi(a)=0$。

如果我们再能证明，对于每个$\lambda\in\mathbf{C}$，都有$f(\lambda)\neq 0$；那么引理1.2.4蕴涵$f''(0)=0$，从而$\phi(a^2)=0$。命题（5）终于得到证明。

为此，定义级数

$$(13)\qquad E(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}a^n,$$

易知它对于任何$\lambda\in\boldsymbol{C}$都依A的范数收敛。由（11）式得到的ϕ的连续性表明，有

$$(14)\qquad f(\lambda)=\phi(E(\lambda))\qquad(\lambda\in\boldsymbol{C}).$$

函数方程

$$(15)\qquad E(\lambda+\mu)=E(\lambda)E(\mu),$$

则可由$E(\lambda)$的决义（13）式直接验证，方法与纯量的情况相同。特别是

$$(16)\qquad E(\lambda)E(-\lambda)=E(0)=e\qquad(\lambda\in\boldsymbol{C}).$$

于是，对任何$\lambda\in\boldsymbol{C}$来说，$E(\lambda)$都是可逆元。这表明，按照定理的题设条件，恒有$\phi(E(\lambda))\neq 0$。因而，由（14）式得知：对于每个$\lambda\in\boldsymbol{C}$，都有$f(\lambda)\neq 0$。 □

1.2.6 定理 任何一维实Banach可除代数A均同构于实数域$\boldsymbol{R}$。

证 设e是A的单位元，且$\{b\}$是A的Hamel基。因为b^2也在A中，故存在唯一的实数λ，使$b^2=\lambda b$。由此可得$b(b-\lambda e)=0$。但是$b\neq 0$，所以，应当有b^{-1}使$(b^{-1}b)(b-\lambda e)=0$，从而得出$b=\lambda e$。这就是说，每个$x\in A$均可唯一地表示为$x=\mu b=\mu\lambda e$。

以上讨论的结果表明，从A到$\boldsymbol{R}$有一个映射ϕ，即，对于$x\in A$，$\phi(x)=\mu\lambda$。容易验证ϕ是线性的，乘法的，又是双射的。因此A同构于$\boldsymbol{R}$。 □

早在1878年，Georg Frobenius就已经证明，总共只有3个有限维的实可除代数，它们是$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}^2$（用复数的乘法）和四元数H。而且四元数H是唯一的有限维的不可交换实可除代数。

至于复代数的同构问题，我们将在下一节§1.3中给出著名的Гельфанд—Мазур定理：每个复Banach可除代数A均同构于复数域$\boldsymbol{C}$。

1.3 向量值函数及其积分

1.3.1 定义

向量值函数 从复数域 C 内到 Banach 空间 E 内的一个映射 $f:C\to E$ 称为一个向量值函数。

A-值函数 向量值函数 f 的值域 E 如果又是一个 Banach 代数，则 f 特称为 A-值函数。

连续性 设 $\Omega\subset C$ 为向量值函数 f 的定义域内的一个子集，$z_0\in\Omega$ 是 Ω 的一个极限点，如果对于任意给定的 $\epsilon>0$，可以求得一个正数 $\delta=\delta(z_0,\epsilon)$，当 $z_0\in\Omega$，$|z-z_0|<\delta$ 时，就有 $\|f(z)-f(z_0)\|<\epsilon$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处连续。在 Ω 内各点处皆为连续的函数 f，称为 Ω 上的连续函数。

强收敛 设 $\{x_n\}$ 为Banach空间 E 内的一个点列，若 x_n 依范数收敛于 $x_0\in E$，则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0。

弱收敛 设 $\{x_n\}$ 为Banach空间 E 内的一个点列，E^* 为 E 的共轭空间（E^* 由 E 上的全体有界线性泛函组成，它也是一个Banach 空间），若对于任何 $\Lambda\in E^*$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda(x_n)=\Lambda(x_0)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，x_0 是点列 $\{x_n\}$ 的弱极限。

弱Cauchy序列 设 $\{x_n\}$ 为Banach空间 E 内的一个点列，若它与任何 $\Lambda\in E^*$ 构成的数列 $\{\Lambda(x_n)\}$ 是一个 Cauchy 数列，则称 $\{x_n\}$ 为弱Cauchy序列。

向量级数 设 $\{x_n\}$ 为Banach空间 E 内的一个点列，那么，由部分和 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 构成的序列 $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k$ 当 $n\to\infty$ 时将称为一个向量级数，记作 $\sum\limits_{k=0}^{n}x_k$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s\in E$，则称级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k$ 收敛于 s，记作

$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s$。

显然，向量级数的收敛性还应当分别陈述：

如果是强收敛，$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s$ 意味着 $\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - s \right\| = 0$；

至于弱收敛，则对于任何 $\Lambda \in E^*$，数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda(x_k)$ 都是收敛的。

类似于数学分析的情况，我们今后用得最多的向量级数是 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$，它在任何点 $x \in E$ 都是强收敛的，这个级数所确定的向量可记作 $\exp(x)$。

向量值函数的可微性 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是一个非空的开子集，$\lambda_0 \in \Omega$，向量值函数 $f: \Omega \to E$；若 E 内存在一个元素，我们记作 $f'(\lambda_0)$，当 Ω 内的 $\lambda \to \lambda_0$ 时有

$$\left\| \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - f'(\lambda_0) \right\| \to 0,$$

则称 f 在 λ_0 处可微，元素 $f'(\lambda^0)$ 是 f 在 λ_0 处的导数值。

高阶导数的定义，读者可以自己得出。

向量值函数的弱可微性 若向量值函数 f 与任何 $\Lambda \in E^*$ 构成的数值函数 $\Lambda(f)$ 在 λ_0 处可微，即，极限

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \Lambda\left[\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right] = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\Lambda[f(\lambda)] - \Lambda[f(\lambda_0)]}{\lambda - \lambda_0}$$

存在，则称向量值函数 f 在 λ_0 处是弱可微的，这个极限值则称为 f 在 λ_0 处的**弱导数**。

1.3.2 引理 如果Banach空间 E 内的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，那么

（1） $\| x_0 \| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \| x_n \|$。

证 任取$\Lambda \in E^*$，无妨设$\|\Lambda\| \leqslant 1$，这时

$$|\Lambda(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |\Lambda(x_n)| = \varliminf_{n\to\infty} |\Lambda(x_n)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

从而有

$$\sup_{\|\Lambda\|\leqslant 1} |\Lambda(x_0)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

但因$\|x_0\| = \sup\limits_{\|\Lambda\|\leqslant 1} |\Lambda(x_0)|$，所以（1）式成立。 □

众所周知，依范数收敛蕴涵弱收敛。但是，一般地说，逆命题不一定成立。然而，引人瞩目的是，通过以下的定理1.3.3和定理1.3.4，我们了解到，用Banach空间内的元素作系数的幂级数如果是弱收敛的，也将是依范数收敛的。这样的幂级数所定义的向量值函数将是可微函数。

1.3.3 定理 设E为Banach空间，又设幂级数

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k \qquad (a_k \in E)$$

在$\lambda_1 \neq \lambda_0$时是弱收敛级数，那么，幂级数（1）在复数域$\boldsymbol{C}$内的一个圆形区域$|\lambda-\lambda_0|<|\lambda_1-\lambda_0|$内依范数收敛。

证 由题设可知，对于任何$\Lambda \in E^*$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda[a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k] = 0.$$

因此，按照引理1.3.2，存在一个$\gamma>0$，使得

$$\|a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k\| \leqslant \gamma \qquad (k=0,1,2,\cdots).$$

如果$q = |\lambda-\lambda_0| / |\lambda_1-\lambda_0| < 1$，那么，对于一切$k$，都有

$$(2) \qquad \|a_k(\lambda-\lambda_0)^k\| = \|a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k\| q^k \leqslant \gamma q^k,$$

将Banach空间内有关点列$\{x_n\}$的范数的不等式

$$(3) \qquad \left\|\sum_{k=0}^{\infty} x_n\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$$

和（2）式应用于级数（1），就能得到所期待的结论。 □

1.3.4 定理 如果幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k$的系数取自Banach

空间E，在λ_0的一个开的ε-邻域

$$U=\{\lambda\in \mathbf{C}:|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}$$

内又是弱收敛级数，那么，它在该邻域内依范数收敛，而且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|\,|\lambda-\lambda_0|^k$$

在$\lambda\in U$也收敛（绝对收敛）；从而定义了一个向量函数

$$(1)\qquad f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k,$$

它在U上总是可微的，导数可以用逐项微分法求得：

$$(2)\qquad f^{(n)}(\lambda)=\sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)\cdots ka_k(\lambda-\lambda_0)^{k-n}.$$

特别是

$$(3)\qquad f^{(n)}(\lambda_0)=n!\,a_n,$$

因此又有

$$(4)\qquad f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}(\lambda-\lambda_0)^k.$$

证 前两个结论很容易由定理1.3.3及其估值公式（2）得出。我们仅就$\lambda_0=0$和$n=1$的情况来求证可微性。

任取$\Lambda\in E^*$，定义$F:U\to\mathbf{C}$为

$$F(\lambda)=\Lambda[f(\lambda)]=\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda(a_k)\lambda^k.$$

众所周知，$\lambda\in U$时有

$$F'(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda[ka_k]\lambda^{k-1},$$

$$F''(\lambda)=\sum_{k=2}^{\infty}\Lambda[(k-1)ka_k]\lambda^{k-2}.$$

因而，按照已证的前面两个结论，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\lambda^{k-1}\quad 和\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)ka_k\lambda^{k-2}$$

在所有的$\lambda\in U$处收敛；甚至还有

$$(5)\qquad \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)k\|a_k\|\,|\lambda|^{k-2}<\infty\qquad(|\lambda|<\varepsilon).$$

所以，对于两个不同的点$\lambda,\lambda_1\in U$，我们有展开式

$$(6)\qquad \frac{f(\lambda)-f(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\lambda_1{}^{k-1}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(\frac{\lambda^k-\lambda_1{}^k}{\lambda-\lambda_1}-k\lambda_1{}^{k-1}\right).$$

现在，设$|\lambda_1|<\mu<\varepsilon$。这时，凡是适合$|\lambda-\lambda_1|<\mu-|\lambda_1|$的$\lambda$也有$|\lambda|<\mu$，再注意到

$$\frac{\lambda^m-\lambda_1{}^m}{\lambda-\lambda_1}=\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}\lambda_1+\cdots+\lambda\lambda_1{}^{m-2}+\lambda_1{}^{m-1}\quad(m=1,2,\cdots),$$

就得知这样的λ能使

$$|\lambda^m-\lambda_1{}^m|\leqslant|\lambda-\lambda_1|m\mu^{m-1}.$$

于是

$$\left|\frac{\lambda^k-\lambda_1{}^k}{\lambda-\lambda_1}-k\lambda_1{}^{k-1}\right|=|(\lambda^{k-1}-\lambda_1{}^{k-1})+\lambda_1(\lambda^{k-2}-\lambda_1{}^{k-2})$$

$$+\cdots+\lambda_1{}^{k-2}(\lambda-\lambda_1)|\leqslant|\lambda-\lambda_1|[(k-1)\mu^{k-2}$$

$$+\mu(k-2)\mu^{k-3}+\cdots+\mu^{k-2}\cdot 1]$$

$$=|\lambda-\lambda_1|\frac{(k-1)k}{2}\mu^{k-2}.$$

由此并借助于（5）式，我们得知在环形$0<|\lambda-\lambda_1|<\mu-|\lambda_1|$内，（6）式右端的级数绝对收敛，而且

$$\left\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\lambda_1{}^{k-1}\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|\lambda-\lambda_1|\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)k\|a_k\|\mu^{k-2}.$$

至此，$f(\lambda)$的可微性和求导数的方法就得到了证明． □

看到定理1.3.4后面的结论，我们很自然地会想到以下的

定义 如果Ω是$\mathbf{C}$内的一个非空开子集，E是一个复Banach

空间，当向量函数$f: \Omega \to E$在Ω内每一点都可微时，称f为在Ω内的**局部全纯函数**。

如果Ω是连通的，也就是说，Ω是一个区域；则称f为Ω内的**全纯函数**。

弱局部全纯函数和**弱全纯函数**的定义可以借助弱可微性来陈述，此处不赘。

按照上述定义，我们从定理1.3.4得知：向量幂级数$\Sigma a_k(\lambda-\lambda_0)^k$在它的收敛域内部确定了一个全纯函数。

1.3.5 定义

向量值函数的积分 设Γ是$\mathbf{C}$内的一条有向的、可求长的曲线，E是复Banach空间；如果连续向量值函数$f: \Gamma \to E$的Riemann和

$$\sum f(\xi_k)(\lambda_k-\lambda_{k-1})$$

的极限值存在，则称f为在Γ上是可积函数，这个极限值就是**积分**，记作

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda,$$

Γ称为**积分路线**。

这里，我们省略了有关极限过程的叙述，因为它与读者所熟知的复变函数论中相应的内容极为相似；只须将其中的一些绝对值$|\cdot|$换成范数$\|\cdot\|$。

由定义立即得出积分的下述性质：

（1）
$$\int_\Gamma [\alpha f(\lambda)+\beta g(\lambda)]d\lambda=\alpha\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda+\beta\int_\Gamma g(\lambda)d\lambda$$
$(\alpha, \beta \in \mathbf{C})$；

（2）
$$\left\|\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right\| \leqslant \max_{\lambda\in\Gamma}\|f(\lambda)\|\cdot(\Gamma\text{的长度})；$$

（3） 对于任何，$\Lambda \in E^*$，都有
$$\Lambda\left[\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right]=\int_\Gamma \Lambda[f(\lambda)]d\lambda;$$

或者，更为一般地

$$(3') \qquad T\left[\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right]=\int_\Gamma T[f(\lambda)]d\lambda \qquad T\in\mathscr{L}(E,F)),$$

$\mathscr{L}(E,F)$ 是全体从 Banach空间 E 到另一个 Banach空间 F 的连续线性算子构成的空间。

讨论向量值函数的特款 A-值函数时，积分还有一个重要的性质：对于任何 $x\in E$，都有

$$(4) \qquad x\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda=\int_\Gamma xf(\lambda)d\lambda;$$

$$(4') \qquad \left[\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right]x=\int_\Gamma f(\lambda)xd\lambda.$$

我们来证明（4）。

设 M_x 为左乘法算子，回忆一下求证定理 1.1.3时的用法和讨论，并且任取 $\Lambda\in E^*$；这时，ΛM_x 也是 E 上的一个有界线性泛函，因此，根据性质（3），应当有

$$\Lambda M_x\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda=\int_\Gamma \Lambda M_x f(\lambda)d\lambda=\Lambda\int_\Gamma M_x f(\lambda)d\lambda.$$

注意到 Λ 的任意性，就得出

$$M_x\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda=\int_\Gamma M_x f(\lambda)d\lambda,$$

上式就是性质（4）。

性质（3）（4）将是我们今后要经常使用的非常有力的工具。

1.3.6 定理（Cauchy积分定理） 如果 $f:\Omega\to E$ 是 Ω 内的全纯函数，又设 Γ_1，Γ_2 是两条有相同起点和终点的积分路线，它们彼此能在 Ω 内经过连续变形从这一条变成另一条，那么

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)d\lambda=\int_{\Gamma_2} f(\lambda)d\lambda;$$

特别是，如果 Γ 是一条闭曲线，它所包含的内部只含有 Ω 的点，

则有

$$\int_{\Gamma} f(\lambda)\,d\lambda=0.$$

证　根据向量值函数积分的性质（3），对于任何$\Lambda\in E^*$，都有

$$\Lambda\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\,d\lambda=\int_{\Gamma_1}\Lambda[f(\lambda)]\,d\lambda;$$

$$\Lambda\int_{\Gamma_2} f(\lambda)\,d\lambda=\int_{\Gamma_2}\Lambda[f(\lambda)]\,d\lambda.$$

但是，由复变函数的Cauchy积分定理可知

$$\int_{\Gamma^1}\Lambda[f(\lambda)]\,d\lambda=\int_{\Gamma_2}\Lambda[f(\lambda)]\,d\lambda.$$

所以

$$\Lambda\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\,d\lambda=\Lambda\int_{\Gamma_2} f(\lambda)\,d\lambda.$$

既然Λ可以任意选取，那么，就应当是

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\,d\lambda=\int_{\Gamma_2} f(\lambda)\,d\lambda.$$ □

1.3.7 定理　如果$f:\Omega\to E$在单连通域Ω内全纯，或者仅仅是弱全纯；那么，f将是任意阶可微的，并且各阶导数可以用积分公式

（1）　$$f^{(n)}(\lambda)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda)^{n+1}}\,d\zeta\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

表示，其中的Γ是在Ω内围绕λ的一条正向的简单的闭积分路线。此外，f还可以环绕Ω的每个点λ_0展开成一个幂级数

（2）　$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k\qquad(a_k\in E);$$

级数（2）至少能够在环绕λ_0而仅仅含有Ω的点的最大开圆盘内是收敛的。

证　任取一个$\Lambda\in E^*$，置$F(\lambda)=\Lambda[f(\lambda)]$；由于已设$F$在$\Omega$内全纯，所以复变函数论中的Cauchy积分公式成立：

$$(3)\qquad F^{(n)}(\lambda)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta)}{(\zeta-\lambda)^{n+1}}d\zeta.$$

此外，$F(\lambda)=\Lambda[f(\lambda)]$能够环绕$\lambda_0$展开为幂级数

$$(4)\qquad \Lambda[f(\lambda)]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\Lambda[f(\lambda)]}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}d\zeta\right](\lambda-\lambda_0)^k,$$

其中的c是环绕λ_0而整个地位于Ω内的任意圆盘的正向边界。级数（4）在上述每个圆盘的内部U收敛。如果我们将Λ移出到积分号前面，就看出幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}d\zeta\right](\lambda-\lambda_0)^k$$

在U内弱收敛。但是，根据定理1.3.4，它也依范数收敛；又由于（4）式，它的和必定等于$f(\lambda)$。再一次应用定理1.3.4，就得知函数f在U内是无穷次可微的。

读者很容易自己证出其余的结论。　□

1.3.8 定理（Liouville）　一个向量值函数如果在整个复数域$\boldsymbol{C}$内全纯，又是有界函数；那么，它必定是一个常量。

证　设f满足题设条件，再任取一个$\Lambda\in E^*$来定义$F(\lambda)=\Lambda[f(\lambda)]$；那么，$F$在整个复数域$\boldsymbol{C}$内全纯，并且也是有界函数。这时，由复变函数论中的Liouville定理可以判定$F(\lambda)$是一个常数，即，对于一切λ，恒有

$$\Lambda[f(\lambda)]=\Lambda[f(0)].$$

注意到上述方程对于任何$\Lambda\in E^*$都能成立，我们可以肯定：对于一切$\lambda\in\boldsymbol{C}$，都有$f(\lambda)=f(0)$。　□

经过以上几个定理的证明，读者已经初步掌握将复变函数论中的方法移植到向量函数的技巧，因此可以自己动手证明下面的定理。

1.3.9 定理（Laurent展开式）　定义在$0<|\lambda-\lambda_0|<r$内而

在 Banach 空间E内取值的函数f如果是全纯的，那么，它能表示成

$$(1)\qquad f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(\lambda-\lambda_0)^k}\qquad(a_k,b_k\in E).$$

展开式在$0<|\lambda-\lambda_0|<r$内成立，各个系数由下列公式

$$(2)\qquad a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)(\zeta-\lambda_0)^{k-1}d\zeta$$

给出，其中的c是正向圆周$|\lambda-\lambda_0|=\rho$，$0<\rho<r$.

如果在定理1.3.9的题设条件之下，又有全体b_k都等于零，则将λ_0称为f的一个**可去奇点**；如果$b_p\neq 0$，但是$n>p$时所有的$b_n=0$，则将λ_0称为f的一个**p阶极点**；如果有无穷多个$b_n\neq 0$，则将λ_0称为f的一个**本性奇点**。一阶极点也可称为**简单极点**。这些名词与复变函数论中的用法完全相同.

1.4 谱的基本性质

1.1.4 定义

可逆元群 如果A是一个Banach代数，$G=G(A)$是A的全体可逆元的集合，因为按照乘法运算G是一个群，故称之为可逆元群。

谱 如果A是一个Banach代数，$x\in A$，则复数域$\mathbf{C}$内的集合

$$\{\lambda:\lambda\in\mathbf{C},\ \lambda e-x\text{为不可逆元}\}$$

称为x的谱，记作$\sigma(x)$。

预解集和预解式 $\sigma(x)$在$\mathbf{C}$内的余集称为x的预解集，它是复数域$\mathbf{C}$内所有能使$(\lambda e-x)^{-1}$存在的λ构成的集合；预解集内的λ所对应的$R_\lambda=(\lambda e-x)^{-1}$则称为预解式。

谱半径 实数

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}$$

称为$x\in A$的谱半径。

显然，在复数域$\mathbf{C}$内，以原点为中心并能包含$\sigma(x)$的闭圆盘当中有一个半径最小的，这个最小的半径值就是x的谱半径。不过，假如$\sigma(x)$是空集，谈论$\rho(x)$就没有什么意义了。然而，我们即将看到，这样的事情是绝不会发生的。

1.4.2 定理 如果A是Banach代数，那么，$G(A)$是A的一个开子集；映射$x\mapsto x^{-1}$是$G(A)$到$G(A)$上的一个同胚。

证 任取$x\in G(A)$，$h\in A$且$\|h\|<\frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$。注意到

$$x+h=x(e+x^{-1}h),\ \|x^{-1}h\|<\frac{1}{2},$$

则由定理1.2.3的（a）立即可知

$$x+h\in G(A)。$$

再利用该定理的（b）中的估值公式，又可以得到

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\| \\
&=\|[(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h]x^{-1}\| \\
&\leqslant\frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}\cdot\|x^{-1}\|<2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.
\end{aligned}
$$

以上结果表明：$G(A)$是一个开集；映射$x\mapsto x^{-1}$是连续的，它将$G(A)$映射到$G(A)$上，所以它是一个同胚。 □

1.4.3 定理 如果A是Banach代数，$x\in A$，那么，

（a）x的谱$\sigma(x)$是非空紧集；

（b）x的谱半径$\rho(x)$有公式

$$(1)\qquad \rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=\inf_{n\geqslant 1}\{\|x^n\|^{1/n}\}.$$

值得注意的是，谱半径公式（1）中的极限的存在也是结论的一部分，而且，（1）式还蕴涵

$$(2)\qquad \rho(x)\leqslant\|x\|.$$

另外，按照评注1.1.5中的约定，定理中讨论的A应当是复Banach代数，如果A是实Banach代数，$x\in A$的$\sigma(x)$有可能是空集。

证　如果$|\lambda|>\|x\|$，由定理1.2.3知$e-\lambda^{-1}x$在$G(A)$内，$\lambda e-x$也在$G(A)$内。因此$\lambda\bar{\in}\sigma(x)$。这就证明了（2）式，同时得知$\sigma(x)$是有界集。

如能证得$\sigma(x)$是闭集，那么，$\sigma(x)$将是紧集。为此，先定义$g:\mathbf{C}\to A$为$g(\lambda)=\lambda e-x$。显然g是连续函数，而且$\sigma(x)$的余集Ω是$g^{-1}(G(A))$，根据定理1.4.2，Ω应当是开集。所以$\sigma(x)$是闭集。

现在，再定义$f:\Omega\to G(A)$为

$$(3)\qquad f(\lambda)=(\lambda e-x)^{-1}\qquad(\lambda\in\Omega).$$

对f应用定理1.4.2的（1）式，只须将其中的x代之以$\lambda e-x$，h代之以$(\mu-\lambda)e$。如果$\lambda\in\Omega$，且μ距λ足够近，代换之后的结果将是

$$(4)\quad \|f(\mu)-f(\lambda)+(\mu-\lambda)f^2(\lambda)\|\leqslant 2\|f(\lambda)\|^3|\mu-\lambda|^2.$$

因此

$$(5)\qquad \lim_{\mu\to\lambda}\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}=-f^2(\lambda)\qquad(\lambda\in\Omega).$$

这就是说，f是Ω内的强全纯A-值函数。因此，可以将$f(\lambda)$展开成以下的幂级数

$$(6)\qquad f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n$$

$$=\lambda^{-1}e+\lambda^{-2}x+\lambda^{-3}x^2+\cdots.$$

如果$|\lambda|>\|x\|$，定理1.2.3将保证级数（6）在所有中心位于原点，半径$r>\|x\|$的圆Γ_r上一致收敛。因而对其施行逐项求积分是合法的。再应用向量值函数积分的性质（4），经过计算，得出

$$(7)\qquad x^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\lambda^n f(\lambda)\,d\lambda\qquad(r>\|x\|,\ n=0,1,2,\cdots).$$

假如$\sigma(x)$是空集，Ω将是整个复数域$\mathbf{C}$，根据定理1.3.6，（7）中的各个积分都等于零。但是，当$n=0$时，（7）式的左端是$e\neq0$。这个矛盾表明$\sigma(x)$非空。至此，我们证完了(a)。

由于Ω所含的λ全都是$|\lambda|>\rho(x)$，（7）式中的积分路线Γ_r原来取$r>\|x\|$的，现在可以换成$r>\rho(x)$。如果

（8）　$M(r)=\max\limits_{\theta}\|f(re^{i\theta})\|$　　$(r>\rho(\theta))$，

f的连续性蕴涵$M(r)<\infty$。由（7）式又推出

（9）　$\|x^n\|\leqslant r^{n+1}M(r)$。

于是，有

（10）　$\limsup\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\leqslant r$　　$(r>\rho(x))$。

注意到在上式中r的任意性，就能得出

（11）　$\limsup\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\leqslant\rho(x)$.

另一方面，如果$\lambda\in\sigma(x)$，那么，因式分解

（12）　$\lambda^n e-x^n=(\lambda e-x)(\lambda^{n-1}e+\cdots+x^{n-1})$

表明 $\lambda^n e-x^n$不是可逆元。换言之，$\lambda^n\in\sigma(x^n)$。利用（2）式可以得到

（13）　$|\lambda^n|\leqslant\|x^n\|$　　$(n=1,2,3,\cdots)$。

因此有

（14）　$\rho(x)\leqslant\inf\limits_{n\geqslant 1}\|x^n\|^{1/n}$。

将（11）式与(14)式合并，就完成了(1)式的证明.　□

1.4.4 评注

(*a*)A的一个元素x是否在A内可逆，纯属代数性质。因此，谱$\sigma(x)$和谱半径$\rho(x)$是利用A的代数结构来定义的，并不曾有任何度量的或拓扑的考虑。但是，$\lim\|x^n\|^{1/n}$显然是由A的度量性质确定的。所以，谱半径公式的引人注目之处在于：它所肯定的两个相等的量，竟然是在完全不同的背景之下产生的。

(*b*) 代数A可能是更大的Banach代数B的一个子代数，而且还很可能出现这种情况：某个$x\in A$在A内不可逆，但是在B内可逆。因此，x谱要由含有它的代数来确定。$\sigma_A(x)$与$\sigma_B(x)$（符号的意义自明）之间有包含关系

$$\sigma_A(x)\supset\sigma_B(x).$$

这两个谱可以不同。然而，谱半径将不受影响地从A转移到B。因为谱半径公式表明它利用了x的幂的度量性质，这些与在A以外发生的任何事情无关。

稍后，求证定理1.4.8时，我们再详细讨论$\sigma_A(x)$与$\sigma_B(x)$之间的关系。

(*c*) 读者不要忽略，我们在求证定理1.4.3的（5）式时，曾经得到：Banach代数的一个元x的预解式R_λ在预解集内是全纯函数。

(*d*) 还可以指出：如果$\lambda_0\in\sigma(x)$是一个孤立点，它必定是预解式R_λ的一个极点或本性奇点。

这是因为，如其不然，R_λ的Laurent展开式将是

$$R_\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k.$$

任取序列$\{\lambda_n\}\subset \mathbf{C}-\sigma(x)$，$\lambda_n\neq\lambda_0$，$\lambda_n\to\lambda_0$。由此得到

$$R_{\lambda_n}\longrightarrow a_0,$$

以及

$$R_{\lambda_n}(\lambda_0e-x)\longrightarrow a_0(\lambda_0e-x).$$

注意到

$$\begin{aligned}R_{\lambda_n}(\lambda_0e-x)&=R_{\lambda_n}[(\lambda_ne-x)+(\lambda_0-\lambda_n)e]\\&=e+(\lambda_0-\lambda_n)R_{\lambda_n}\end{aligned}$$

又收敛于e，因此

$$a_0(\lambda_0e-x)=e;$$

类似地还能得到

$$(\lambda_0e-x)a_0=e.$$

但是，这样的结果意味着$\lambda_0\in\mathbf{C}-\sigma(x)$，而与原设$\lambda_0\in\sigma(x)$抵触。 □

1.4.5 定理（Гельфанд—Мазур） 任何复Banach可除代数A均等距同构于复数域$\mathbf{C}$。

证 任取$x\in A$，由定理1.4.3知$\sigma(x)\neq\varnothing$。因此总会有一

个$\lambda\in\sigma(x)$使得$(\lambda e-x)^{-1}$不存在。既然A是可除代数，那么必定是$\lambda e-x=0$，亦即$x=\lambda e$。这表明，我们能够让每一个$x\in A$与一个$\lambda\in\mathbf{C}$相对应，而且，λ这个是唯一的；否则，若$x=\lambda_1 e$，$x=\lambda_2 e$且$\lambda_1\neq\lambda_2$，将导致$\lambda_1 e-\lambda_2 e=(\lambda_1-\lambda_2)e=0$，从而$e=0$，这是不可能的。

以上讨论表明，有一个映射$f:A\to\mathbf{C}$，它由$f(x)=\lambda$确定，其中$x=\lambda e$。

容易验证映射f是线性的，乘法的，还是等距的。

最后，若给定$\lambda\in\mathbf{C}$，则元素$x=\lambda e\in A$满足$f(x)=\lambda e$。因此f是双射的。 □

从定理1.4.5立刻可得

推论 任何复Banach可除代数A必定是一维的交换代数。

实际上，在求证定理的过程中，首先得知$\{e\}$是A的一个Hamel基；因此，任取$x,y\in A$，将有$x=\lambda e$，$y=\mu e$；于是

$$xy=(\lambda e)(\mu e)=(\lambda\mu)e=(\mu\lambda)e=(\mu e)(\lambda e)=yx. \quad \square$$

定理1.4.3与定理1.4.5可以说是这一章的关键性结果。本书后面的几章有很多内容几乎是不曾用到第1章的其它部分，但是离不开这两个定理。

1.4.6 一个拓扑学引理 如果V和W是拓扑空间X内的两个开集，$V\subset W$，且W不含V的边界点，那么，V是W的一些分支的并集。

（根据拓扑学中的定义，W的一个分支是W的一个极大连通子集）。

证 设Ω是W的一个分支，且与V相交，再设U是$\bar{V}$的余集，因为W不含V的边界点，所以Ω是两个不相交的开集$\Omega\cap V$与$\Omega\cap U$的并集；由于Ω须是连通集，从而推知$\Omega\cap U$是空集；因此$\Omega\subset V$。 □

1.4.7 引理 如果A是Banach代数，$\{x_n\}\subset G(A)$，x是$G(A)$的一个边界点，当$n\to\infty$时又有$x_n\to x$；那么，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n^{-1}\|=$

∞。

证 用反证法。如其不然，就应当有$M<\infty$使$\|x_n^{-1}\|<M$适用于无穷多个n。这些n当中，总会有一个，比方说是n_0，能使$\|x_{n_0}-x\|<1/M$成立。对于这个n_0来说，有

$$\|e-x_{n_0}^{-1}x\|=\|x_{n_0}^{-1}(x_{n_0}-x)\|<1,$$

因而$x_{n_0}^{-1}x\in G(A)$。由于$G(A)$是一个群，那么$x=x_{n_0}(x_{n_0}^{-1}x)\in G(A)$。注意到$G(A)$还是开集，$x$必须是$G(A)$的一个内点，这与原设是相抵触的；所以$\{\|x_n^{-1}\|\}$不可能是有界集。 □

1.4.8 定理

(*a*) 如果A是Banach代数B的一个闭子代数，而且A含有B的单位元，那么，$G(A)$是$A\cap G(B)$的一些分支的并集。

(*b*) 在上述条件下，如果$x\in A$，那么，$\sigma_A(x)$是$\sigma_B(x)$与一族（可能为空）$\sigma_B(x)$的余集的有界分支的并集.特别是，$\sigma_A(x)$的边界落在$\sigma_B(x)$之内。

证 (*a*) A的每个在A内有逆元的元素在B内有相同的逆元，因而$G(A)\subset G(B)$。$G(A)$和$A\cap G(B)$都是A的开子集。为了求证(*a*)，根据引理1.4.6，只须证明：任取$G(A)$的一个边界点y，都有$y\notin G(B)$。

其实，这样的y必定是$G(A)$内一个序列$\{y_n\}$的极限点，根据引理1.4.7，将有$\|y_n^{-1}\|\to\infty$。假如$y\in G(B)$，在$G(B)$内的逆映射的连续性（参看定理1.4.2）将使y_n^{-1}收敛于y^{-1}。于是，$\{\|y_n^{-1}\|\}$将是有界集。这个矛盾说明$y\notin G(B)$.至此(*a*)证讫。

(*b*) 设Ω_A与Ω_B分别为$\sigma_A(x)$与$\sigma_B(x)$相对于C的余集.包含关系$\Omega_A\subset\Omega_B$显而易见，因为$\lambda\in\Omega_A$当且仅当$\lambda e-x\in G(A)$。设λ_0是Ω_A的一个边界点，对应的λ_0e-x应当是$G(A)$的一个边界点.在求证(*a*)的过程中已经得知，这时$\lambda_0e-x\notin G(B)$。因而$\lambda_0\notin\Omega_B$。现在，由引理1.4.6可以肯定，Ω_A是Ω_B的一些分支的并集。那么，Ω_B的其它分支应当是$\sigma_A(x)$的子集.于是(*b*)也得证。 □

推论 如果$\sigma_B(x)$并不分离C，也就是说，它的余集Ω_B是连通的，那么$\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$。

证 这是因为，这样的Ω_B没有有界分支. □

这个推论的最重要的应用，是遇到$\sigma_B(x)$ 仅仅含有实数的时候。

利用引理1.4.7，还可以证得与 Гельфанд-Мазур 定理有相同结论的定理1.4.9，虽然它的重要性不是那么显著。

1.4.9 定理 如果A是Banach 代数，又有$M<\infty$使得任何$x,y\in A$都有

（1） $\|x\|\,\|y\|\leqslant M\|xy\|$

成立，那么，A等距同构于$\boldsymbol{C}$。

证 设y是$G(A)$ 的一个边界点. 这时有一个序列 $\{y_n\}\subset G(A)$使$y=\lim y_n$。根据引理1.4.7，$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n^{-1}\|=\infty$. 但是，由题设又有

（2） $\|y_n\|\,\|y_n^{-1}\|\leqslant M\|e\|$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

因此，必须是$\|y_n\|\to 0$，也就是说$y=0$。

任取$x\in A$，$\sigma(x)$的每个边界点λ将对应于$G(A)$的一个边界点$\lambda e-x$。既然满足题设条件的Banach代数A的$G(A)$的边界点是零元素，那么$\lambda e-x=0$，亦即$x=\lambda e$。这样就得知

$$A=\{\lambda e:\lambda\in\boldsymbol{C}\}.$$ □

最后，我们来考察，对于 Banach 代数A的两个相当接近的元素x与y，它们的谱能否按照适当的意义也是彼此接近的？定理1.4.10给出了十分简单的回答。

1.4.10 定理 如果A是Banach代数，$x\in A$，Ω是$\boldsymbol{C}$内的一个开集，并且$\sigma(x)\subset\Omega$；那么，存在这样的$\delta>0$，只要$y\in A$而又$\|y\|<\delta$，就有$\sigma(x+y)\subset\Omega$。

证 由于$\|(\lambda e-x)^{-1}\|$在$\sigma(x)$ 的余集内是λ的连续函数，又因为

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|(\lambda e-x)^{-1}\|=0,$$

所以存在$M<\infty$，使得

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\|<M$$

对于Ω以外的一切λ都能成立。

如果$y\in A$，$\|y\|<1/M$；那么，当$\lambda\overline{\in}\Omega$时将有$\|(\lambda e-x)^{-1}y\|<1$，于是

$$\lambda e-(x+y)=(\lambda e-x)[e-(\lambda e-x)^{-1}y]$$

在A内可逆，也就是说，$\lambda\overline{\in}\sigma(x+y)$。

因此，只须取$\delta=1/M$，就能得到所期待的结论。 □

1.5 符号运算

1.5.1 引理 如果A是Banach代数，$x\in A$，$\alpha\in\mathbf{C}$，$\alpha\overline{\in}\sigma(x)$，$\Omega=\mathbf{C}-\{\alpha\}$；又$\Gamma$在$\Omega$内围绕$\sigma(x)$；那么，有

(1) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda=(\alpha e-x)^{n}$$

$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

证 将（1）式中的积分记作y_n。注意到$\lambda\overline{\in}\sigma(x)$时有

$$(\lambda e-x)^{-1}=(\alpha e-x)^{-1}+(\alpha-\lambda)(\alpha e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}。$$

因此

(2) $$y_n=(\alpha e-x)^{-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n}d\lambda+(\alpha e-x)^{-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n+1}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda。$$

由于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n}d\lambda=0,$$

所以，从（2）式能够得到递推公式

(3) $$(\alpha e-x)y_n=y_{n+1}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

这意味着，如果我们证明了$n=0$的特款，那么，可以由（3）式导出（1）式。

现在来求证

(4) $$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e-x)^{-1}d\lambda=e.$$

设Γ_r是一个正向圆周，中心在原点，半径$r>\|x\|$。由于$(\lambda e-x)^{-1}$在Γ_r上是全纯函数，它可以展开为幂级数

(5) $$(\lambda e-x)^{-1}=\sum\lambda^{-n-1}x^n;$$

然后对级数（5）施行逐项积分，就能得到（4）式，只须将其中的积分路线Γ换成Γ_r。而Cauchy积分定理（定理1.3.6）能够保证，这样做时积分值不会受到影响。 □

这个引理的直接推论就是下面的定理1.5.2.为了便于叙述，我们先介绍向量值函数中的有理函数概念。

定义 如果

$$R(\lambda)=P(\lambda)+\sum_{m,k}c_{m,k}(\lambda-\alpha_m)^{-k}$$

是一个以诸α_m为极点的有理函数，即，P是一个多项式，Σ和中只含有限多项；设$x\in A$，$\sigma(x)$中不含$R(\lambda)$的极点，则对应的

$$R(x)=P(x)+\sum_{m,k}c_{m,k}(x-\alpha_m e)^{-k}$$

称为一个向量值有理函数。

1.5.2 定理 如果Ω是$\mathbf{C}$内一个包含了$\sigma(x)$的开集，$R(\lambda)$在其中为全纯函数，而Γ是在Ω内围绕$\sigma(x)$的积分路线，那么，有

(1) $$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$ □

1.5.3 定义 设A是Banach代数，Ω是$\mathbf{C}$内的一个开集，而$H(\Omega)$是Ω内的全体复全纯函数构成的代数，由定理1.4.10知

(1) $$A_\Omega=\{x\in A:\sigma(x)\subset\Omega\}$$

是A的一个开子集。

我们定义$\tilde{H}(A_\Omega)$为，以A_Ω做定义域的全体A-值函数f的集合，它们都是由$f\in H(\Omega)$经过公式

(2) $$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

得出的，其中Γ是在Ω内围绕$\sigma(x)$的任一积分路线。

对于这个定义，须作以下几点注释。

(a) 因为Γ与$\sigma(x)$保持一段距离，又因为反函数在A内连续，所以（2）式中的被积函数是连续函数，积分存在并且$\tilde{f}(x)$确是A内的一个元素。

(b) 进一步说，被积函数还是$\sigma(x)$的余集内的一个全纯A一值函数。Cauchy积分定理蕴涵$\tilde{f}(x)$与积分路线Γ的选法无关，只要求Γ在Ω内围绕$\sigma(x)$。

(c) 根据前面给出的向量值有理函数的定义和定理1.5.2，当$f(\lambda)$是有理函数时，将有

$$\tilde{f}(y)=f(x).$$

另外，如果$x=\alpha e$且$\alpha\in\Omega$，则（2）式将变成

$$(3)\qquad \tilde{f}(\alpha e)=f(\alpha)e.$$

读者或许已经注意到，$\alpha e\in A_{\Omega}$当且仅当$\alpha\in\Omega$。如果我们将$\lambda\in\boldsymbol{C}$与$\lambda e\in A$看成是等同的，那么，每个$f\in H(\Omega)$都可以视为将A_{Ω}的某个子集（即A_{Ω}与由e生成的A的一维子空间的交集）映入A，并且，这时（3）式表明$\tilde{f}$可以理解为f的扩张。

可能是考虑到上述情况，许多论著在涉及这个问题时，仍将（2）式中的$\tilde{f}(x)$记作$f(x)$。不过，为了避免误解和模棱两可，我们决定采用新的记号$\tilde{f}(x)$。

(d) 从$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_{\Omega})$上的映射$f\mapsto\tilde{f}$按照下述的意义来说是连续的：

如果$f_n\in H(\Omega)$　$(n=1,2,3,\cdots)$在Ω的所有紧子集上一致收敛于f，$\lim f_n=f$；那么，对应的$\tilde{f}_n(x)$将一致收敛于$\tilde{f}(x)$，

$$\lim\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}(x).$$

1.5.4 定理　在定义1.5.3中得到的函数$\tilde{f}(x)$有以下性质：

(a) 对于$f(\lambda)=\lambda^n$来说，有$\tilde{f}(x)=x^n$　$(n=0,1,2,\cdots)$；

(b) $(\alpha f)^{\sim}(x)=\alpha\tilde{f}(x)$；

(c) $(f+g)^{\sim}(x)=\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x)$；

(d) $(fg)^{\sim}(x)=\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$，因而$\tilde{f}(x)$与$\tilde{g}(x)$的乘法运算

是可交换的：

(e) $f(x)$为可逆元，当且仅当每个$\lambda\in\sigma(x)$都有$f(\lambda)\neq0$；

而且，如果$f(x)$可逆，则$[f(x)]^{-1}=\left(\frac{1}{f}\right)^{\sim}(x)$.

证 (a)，(b)和(c)均可用引理1.5.1和定义1.5.3直接验证。

(d) 现在来求证：由$f,g\in H(\Omega)$作出的

(1) $\qquad h(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda) \qquad (\lambda\in\Omega)$

一定对应于

(2) $\qquad \tilde{h}(x)=f(x)\tilde{g}(x) \qquad (x\in A_\Omega)$.

我们知道，当$f(\lambda)$，$g(\lambda)$都是有理函数时，$h(\lambda)$也是有理函数；因此

$$h(x)=f(x)g(x),$$
$$f(x)=\tilde{f}(x),\quad g(x)=\tilde{g}(x),\quad h(x)=\tilde{h}(x);$$

于是（2）式成立。至于一般情况，我们先在Ω的紧子集上用有理函数序列$\{f_n\}$与$\{g_n\}$去一致逼近f与g，这时，有理函数序列$\{f_ng_n\}$将一致收敛于h。再利用定义1.5.3的注释(d)中说到的映射$f\mapsto f$的连续性，就能证明（2）式仍然成立。

(e) 如果$f(\lambda)$在$\sigma(x)$上没有零点，则$g(\lambda)=\dfrac{1}{f(\lambda)}$将是一个开集$\Omega_1$上的全纯函数，这个$\Omega_1$适合包含关系$\sigma(x)\subset\Omega_1\subset\Omega$。因为在$\Omega_1$内，$f(\lambda)g(\lambda)=1$，按照已经证明的(d)，将有$f(x)\tilde{g}(x)=e$。所以$f(x)$是可逆的。反之，如有某个$\alpha\in\sigma(x)$使$f(\alpha)=0$，那么，将有$h(\lambda)\in H(\Omega)$使得

$$(\lambda-\alpha)h(\lambda)=f(\lambda) \qquad (\lambda\in\Omega),$$

对应地，就有

$$(x-\alpha e)\tilde{h}(x)=f(x)=\tilde{h}(x)(x-\alpha e).$$

既然$x-\alpha e$在A内不可逆，那么，$f(x)$也不可逆。 □

1.5.5 定理 如果按照定义1.5.3中所说的那样去理解A，$H(\Omega)$和$\tilde{H}(A_\Omega)$；那么，$\tilde{H}(A_\Omega)$是一个复代数；映射$f\mapsto f$是

$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_\Omega)$上的一个代数同构，并且是连续的。

证 由于在求证定理1.5.4的（d）时已经引入$\tilde{H}(A_\Omega)$中的乘法，因此不难验证 $\tilde{H}(A_\Omega)$ 是一个复代数，并且还是交换代数。

为了证明映射$f\mapsto \tilde{f}$是一个代数同构，首先注意到前面说到的$\tilde{H}(A_\Omega)$中的乘法实质上就是这个映射的乘法；再由定义1.5.3中的$\tilde{f}(x)$的积分表示式（2）立即可知它是线性的；此外，如果$\tilde{f}=0$，则有

（1） $$f(\alpha)e=\tilde{f}(\alpha e)=0 \qquad (\alpha\in\Omega),$$

于是$f=0$。因此映射是一对一的。

最后，再回过头来看看定义1.5.3中的积分式（2），由$\|(\lambda e-x)^{-1}\|$在Γ上的有界性就能得到$f\mapsto\tilde{f}$的连续性。 □

1.5.6 定理（谱映射定理） 如果$f\in H(\Omega)$，$x\in A_\Omega$，那么，恒有

$$\sigma(\tilde{f}(x))=f(\sigma(x)).$$

证 选取$\beta\in \mathbf{C}$，按照定义，$\beta\in\sigma(\tilde{f}(x))$当且仅当$\tilde{f}(x)-\beta e$在$A$内不可逆。将定理1.5.4($e$)中的$f(\lambda)$换成$f(\lambda)-\beta$，然后应用其结论，就得到：$\tilde{f}(x)-\beta e$在$A$内不可逆，当且仅当$f(\lambda)-\beta$在$\sigma(x)$内有零点，亦即，$\beta\in f(\sigma(x))$. □

有了谱映射定理，我们就能够将函数的复合手续也归入符号运算之列。

1.5.7 定理 如果$x\in A_\Omega$；$f\in H(\Omega)$，Ω_1是包含$f(\sigma(x))$的一个开集；$g\in H(\Omega_1)$且在Ω_0内$h(\lambda)=g(f(\lambda))$；这个Ω_0是所有$\lambda\in\Omega$且$f(\lambda)\in\Omega_1$的λ构成的集；那么有$\tilde{f}(x)\in A_{\Omega_1}$以及$\tilde{h}(x)=\tilde{g}(\tilde{f}(x))$.

简洁地说，就是：对应于$h=g\circ f$，有$\tilde{h}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$.

证 由谱映射定理知$\sigma(\tilde{f}(x))\subset\Omega_1$，因此$\tilde{g}(\tilde{f}(x))$是有意义的。

在Ω_1内选定围绕$f(\sigma(x))$的积分路线Γ_1。有这样一个开集W，$\sigma(x)\subset W\subset\Omega_0$，它足够小以使

(1) $$Ind_{\Gamma_1}(f(\lambda))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta-f(\lambda)}$$

$$=1 \qquad (\lambda\in W).$$

在W内选定围绕$\sigma(x)$的积分路线Γ_0。如果$\zeta\in\Gamma_1$，则有$1/(\zeta-f)\in H(W)$。因而，将定理1.5.5中的Ω换成W之后，可得

(2) $$[\zeta e-\tilde{f}(x)]^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}[\zeta-f(\lambda)]^{-1}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$$(\zeta\in\Gamma_1).$$

由于Γ_1在Ω_1内围绕着$\sigma(\tilde{f}(x))$，(1)式和(2)式蕴涵

$$\tilde{g}(\tilde{f}(x))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}g(\zeta)[\zeta e-\tilde{f}(x)]^{-1}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}g(\zeta)[\zeta-f(\lambda)]^{-1}d\zeta(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}g(f(\lambda))(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$$=\tilde{h}(x).$$ □

下面我们将介绍符号运算的某些应用，首先涉及的是根与对数的存在性。

定义 对于Banach代数A中的给定元素x来说，如果在A内有某个元素y，使得

$$x=y^n$$

成立，则y称为x的一个n次根。

对于Banach代数A中的给定元素x来说，如果在A内有某个元素y，使得

$$x=\exp(y)$$

成立，则y称为x的一个对数。

1.5.8 定理 如果A是Banach代数，$x\in A$，并且x的谱$\sigma(x)$从0到∞都不分离，那么

(*a*) x 在 A 内存在所有各次的根；

(*b*) x 在 A 内有一个对数；

(*c*) 任给 $\varepsilon>0$，总有一个多项式 P 使 $\|x^{-1}-P\|<\varepsilon$.

此外，如果 $\sigma(x)$ 位于正实轴内，则 (*a*) 中所说的根能适当选取以使其也满足同样的条件。

证 我们先来求证 (*b*)，按照题设，0 位于 $\sigma(x)$ 的余集的无界分支上，因而有一个函数 f，它在一个单连通开集 $\Omega\supset\sigma(x)$ 内全纯，并且满足

$$\exp(f(\lambda))=\lambda.$$

应用定理1.5.7，可以得到与上式对应的

$$\exp(\tilde{f}(x))=x.$$

因此 $y=\tilde{f}(x)$ 就是 x 的一个对数。

如果每个 $\lambda\in\sigma(x)$ 都满足条件 $0<\lambda<\infty$，上述 f 还能适当选取以使其在 $\sigma(x)$ 上取实数值。由谱映射定理，这时 $\sigma(y)$ 位于实数轴内。设 $z=\exp(y/n)$，那么 $z^n=x$。再一次应用谱映射定理，可以证明：如果 $\sigma(y)\subset(-\infty,\infty)$，就有 $\sigma(z)\subset(0,\infty)$。于是，由 (*b*) 又证得了 (*a*)。

求证 (*c*) 时，只须注意到，在某个包含 $\sigma(x)$ 的开集上，$1/\lambda$ 可以用多项式去一致逼近；然后应用映射 $f\mapsto\tilde{f}$ 及其连续性。□

上述结果即使在有限维代数中也是很有价值的。例如，设 A 为全体复 n 阶方阵的代数（或者说是 $\mathbf{C}^n$ 上的全体有界线性算子的代数），那么，按照定理1.5.8的 (*b*)，复 n 阶方阵 M 是某个方阵的指数，当且仅当 0 不是 M 的特征值；亦即，当且仅当 M 是可逆元。

1.5.9 定理 设 A 为Banach代数，$x\in A$.

(*a*) 如果 $P(\lambda)$ 是一元多项式，且 $P(x)=0$，那么，$\sigma(x)$ 位于 $P(\lambda)$ 的零点集内；

(*b*) 特别是，如果 x 是**幂等元**，即，如果 $x^2=x$；那么，$\sigma(x)\subset\{0,1\}$；

(*c*) 如果 A 的某个元素的谱是不连通的，那么，A 包含一个非平凡的幂等元。（读者容易想到，所谓平凡的幂等元乃是 0 与

e）．

证 根据谱映射定理，有

$$P(\sigma(x))=\sigma(P(x))=\sigma(0)=\{0\}.$$

这就证得(a)。

作为特款，取$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda$，则$P(\lambda)$的零点集为$\{0,1\}$，由(a)即可得到(b)。

如果$\sigma(x)$是不连通的，应当有不相交的开集Ω_0与Ω_1，它们都与$\sigma(x)$相交，并集$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$复盖$\sigma(x)$。在$\Omega_0$内置$f(\lambda)=0$；而在$\Omega_1$内置$f(\lambda)=1$，这样定义的函数$f\in H(\Omega)$。设$y=\tilde{f}(x)$。因为$f^2=f$，对应地，将有$y^2=y$。于是，$y$是幂等元。利用谱映射定理可得

$$\sigma(y)=f(\sigma(x))=\{0,1\}.$$

由此可以推知y不是平凡的幂等元；因为o和e的谱都是单点谱（即只含一个数的谱）． □

1.5.10 定义

点谱（离散谱） 设$\mathscr{B}(X)$是Banach空间X上的全体有界线性算子构成的Banach代数，由算子$T\in\mathscr{B}(X)$的的所有特征值组成的数集称为T的点谱或离散谱，记作$\sigma_p(T)$。

显然，$\lambda\in\sigma_p(T)$当且仅当$T-\lambda I$的零空间$\mathscr{N}(T-\lambda I)$具有正的维数。

如果将谱映射定理具体应用于Banach代数$\mathscr{B}(X)$这一特款，能得到以下更为细致的结果。

1.5.11 定理 设$T\in\mathscr{B}(X)$，Ω是$\boldsymbol{C}$的一个开集，$\sigma(T)\subset\Omega$，又$f\in H(\Omega)$．

(a) 如果$x\in X$，$\alpha\in\Omega$，又有$Tx=\alpha x$，那么，也必定有$\tilde{f}(T)x=f(\alpha)x$；或者说，T的每个以α为特征值的特征向量，必定也是$\tilde{f}(T)$的特征向量，对应的特征值则是$f(\alpha)$；

(b) $f(\sigma_p(T))\subset\sigma_p(\tilde{f}(T))$；

(c) 如果$\alpha\in\sigma_p(\tilde{f}(T))$，而且$f-\alpha$在$\Omega$的任何分支内都不恒等于零，那么，$\alpha\in f(\sigma_p(T))$；

(*d*) 如果f在Ω的任何分支内都不是常数值，那么，

$$f(\sigma_p(T))=\sigma_p(\tilde{f}T)).$$

证 求证 (*a*) 时，如果$x=0$，就无须做什么工作；因此可取$x\neq 0$且$Tx=\alpha x$。这时$\alpha\in\sigma(T)$，并且有$g\in H(\Omega)$使

(1) $$f(\lambda)-f(\alpha)=g(\lambda)(\lambda-\alpha);$$

对应地，将要有

(2) $$\tilde{f}(T)-f(\alpha)I=\tilde{g}(T)(T-\alpha I).$$

既然 $(T-\alpha I)x=0$，那么，必定是$\tilde{f}(T)x=f(\alpha)x$.

以上证得的 (*a*)，可以用文字叙述为：当α是T的特征值时，$f(\alpha)$必定是$\tilde{f}(T)$的特征值。写出其逆否命题就能得到 (*b*)。

根据 (*c*) 的题设，有

(3) $$\alpha\in\sigma_p(\tilde{f}(T))\subset\sigma(\tilde{f}(T))=f(\sigma(T)),$$

因此

(4) $$\{f^{-1}(\alpha)\}\cap\sigma(T)\neq\phi.$$

此外，集合（4）应是有限集；因为$\sigma(T)$是Ω的一个紧子集，而且$f-\alpha$在Ω的任何分支都不恒等于零.设$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$是$f-\alpha$在$\sigma(T)$内的零点，并按照它们的重数计数；那么

(5) $$f(\lambda)-\alpha=g(\lambda)(\lambda-\zeta_1)\cdots(\lambda-\zeta_n),$$

其中$g\in H(\Omega)$，它在$\sigma(T)$上没有零点.这时，与(5)式对应地，有

(6) $$\tilde{f}(T)-\alpha I=\tilde{g}(T)(T-\zeta_1 I)\cdots(T-\zeta_n I).$$

由定理1.5.4(*e*) 可知，$\tilde{g}(T)$在$\mathscr{B}(X)$内是可逆元。鉴于α是$\tilde{f}(T)$的一个特征值，$\tilde{f}(T)-\alpha I$在X上不能是一对一的。因此，出现在（6）式的各个算子$T-\zeta_i I$ $(i=1,2,\cdots,n)$当中，至少有一个也不是一对一的；比方说，是$T-\zeta_{i_0}I$。这时$\zeta_{i_0}\in\sigma_p(T)$，并且有$f(\zeta_{i_0})=\alpha$。于是证得了 (*c*)。

将 (*b*) 与 (*c*) 合起来，就能得到 (*d*)。 □

1.6 $\tilde{H}(A_\Omega)$的微分学

这一节继续考察$\tilde{H}(A_\Omega)$中的元。将要得出的结论是：它们与

经典分析中的全纯函数颇为相似，特别是有关可微性、幂级数表示和开映射的性质几个方面。读者还能看到，在交换代数的情况下，所得的结果要比非交换代数更加类似于经典分析中的全纯函数。

1.6.1 定义 设X与Y均为Banach空间，Ω是X的一个开子集，映射$F:\Omega\to Y$，$a\in\Omega$。如果有$A\in\mathscr{L}(X,Y)$能使

$$\lim_{x\to 0}\frac{\|F(a+x)-F(a)-Ax\|}{\|x\|}=0,$$

则A称为F在a的**Fréchet导数**，记作$(DF)_a$。

如果每个$a\in\Omega$都有$(DF)_a$存在，并且映射

$$a\longmapsto(DF)_a$$

是由Ω到$\mathscr{L}(X,Y)$内的连续映射，那么，F称为在Ω内是**连续可微的**。

请读者注意，我们没有要求A的唯一性，因为这件事并不重要。

1.6.2 差商的概念

如果A是Banach代数，$x\in A$，且$x+h\in A$；在恒等式

$$(\lambda e-x)-(\lambda e-x-h)=h$$

的两端同时左乘以$(\lambda e-x-h)^{-1}$和右乘以$(\lambda e-x)^{-1}$，可以得到

(1) $$(\lambda e-x-h)^{-1}-(\lambda e-x)^{-1}=(\lambda e-x-h)^{-1}h(\lambda e-x)^{-1}.$$

当然，事先应假定这些逆元素都存在。

现在，取开集$\Omega\subset C$，$x\in A_\Omega$，$x+h\in A_\Omega$以及$f\in H(\Omega)$；再适当选取积分路线Γ使其在Ω内围绕$\sigma(x)\cup\sigma(x+h)$。于是，由(1)式导出

(2) $$\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x-h)^{-1}h(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

如果h与x可以交换，亦即$xh=hx$；那么，h可以从(2)式的积分号中移出，这是我们曾在定义1.3.5中讲过的。这样，

（3） $(Q\tilde{f})(x;h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e-x-h)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$.

这时可以将（2）式换写成

（4） $\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)=h(Q\tilde{f})(x;h)$,

于是，更容易理解 $(Q\tilde{f})(x;h)$ 确实应当称为差商.

1.6.3 定理 如果A是交换Banach代数，开集$\Omega\subset\mathbf{C}$，$x\in A_{\Omega}$，$f\in H(\Omega)$；那么，存在$\delta>0$，对于一切$h\in A$，当$\|h\|<\delta$时，恒有

（1） $$\tilde{f}(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)h^{n}$$

成立。随之还有

（2） $(D\tilde{f})_{x}(h)=\tilde{f}'(x)h \qquad (h\in A)$.

换句话说，算子$(D\tilde{f})_{x}\in\mathscr{B}(A)$ 就是$\tilde{f}'(x)$去乘.

当然，这个定理所说的，显然是函数$\tilde{f}(x)$ 的 局部映射的性质.

证 参照定理1.4.10的证明，有$M<\infty$，对于Γ上的每个λ，都有$\|(\lambda e-x)^{-1}\|<M$；取$\delta=1/M$，当$\|h\|<\delta$时，级数

（3） $$(\lambda e-x-h)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda e-x)^{-n}h^{n-1}$$

在Γ上依A的范拓扑是一致收敛的. 因此，§1.6.2中的（3）式可以写成

（4） $$(Q\tilde{f})(x;h)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\lambda)(\lambda e-x)^{-n-1}d\lambda h^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\lambda)(\lambda e-x)^{-n-1}d\right)\lambda h^{n-1}.$$

在此，我们插一句话. 对于$f\in H(\Omega)$，读者当已熟悉Cauchy型积分公式

（5） $$f^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\zeta)^{n+1}}d\lambda,$$

既然积分是和的极限，由定理1.5.4中的有关内容以及映射 $f\mapsto\tilde{f}$ 的连续性，对应地可以得出

（6） $$\tilde{f}^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{(\lambda e-x)^{n+1}}d\lambda.$$

现在，只须将（6）代入（4），就有

（7） $$(Q\tilde{f})(x;h)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{n!}h^{n-1}.$$

其中h^{n-1}的系数的范数受控制于一个常数（取决于 f 与 Γ）乘以 M^n。因此，（7）式右端的级数依范数收敛。

注意到 A 是交换Banach代数，并将（7）应用于§1.6.2中的（4），立即可得

（8） $$\tilde{f}(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)h^n.$$

有了（8），再按照 Fréchet 导数的定义，经过直接经验证就能得到（2）。 □

以上所述，与经典分析 $A=\boldsymbol{C}$ 时所得的结果完全相同。但须注意，在此曾假定 A 是交换 Banach 代数。下面将要考虑非交换Banach代数的情况。

1.6.4 换位子

今后，将分别用L_x与R_x表示左乘与右乘以 Banach 代数 A 中的元素 x。因为在 A 中结合律 $y(xz)=(yx)z$ 成立，所以，每个**左乘子**L_y可与每个**右乘子**R_z交换：

$$L_y[R_z(x)]=R_z[L_y(x)].$$

特别是，L_x与R_x彼此之间以及与算子

（1） $$C_x=R_x-L_x$$

都是可交换的。由于

$$C_x(y)=yx-xy,$$

C_x被称为 y 和 x 的**换位子**。

显然，L_x,R_x和C_x都属于$\mathscr{B}(A)$。还容易看出

(2) $\sigma(L_x)=\sigma(x)=\sigma(R_x)$,

以及$\|C_x\|\leqslant 2\|x\|$.

为了验证（2）式，任取可逆元$y\in A$，则有

$$(\lambda I-L_x)y=\lambda y-xy=(\lambda e-x)y.$$

可见$\lambda I-L_x$与$\lambda e-x$的逆元素存在与否的可能性是一致的，因而得到$\sigma(L_x)=\sigma(x)$、类似地可得$\sigma(R_x)=\sigma(x)$。

第2章的定理2.4.3的推论2，还要进一步研究$\sigma(C_x)$的某些更深刻的性质。

1.6.5 定理 如果A是Banach代数，开集$\Omega\subset\mathbf{C}$，$x\in A_\Omega$，又$f\in H(\Omega)$；那么，$\tilde{f}$是一个从A_Ω到A内的连续可微函数，且有

(1) $$(D\tilde{f})_x(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}y(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$(y\in A)$,

其中Γ是Ω内任一围绕$\sigma(x)$的积分路线。

算子$(D\tilde{f})_x$还能表示为$\mathscr{B}(A)$-值积分

(2) $$(D\tilde{f})_x=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I-R_x)^{-1}(\lambda I-L_x)^{-1}d\lambda,$$

或者表示为差商

(3) $$(D\tilde{f})_x=(Q\tilde{f})(L_x;C_x).$$

如果Ω包含了所有满足条件$|\lambda|\leqslant 3\|x\|$的$\lambda$，那么，将有

(4) $$(Q\tilde{f})_x=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\tilde{f}^{(m)}(x)C_x^{m-1}.$$

我们还应当对（3）式所用的记号稍加说明。在其左端，$\tilde{f}$是一个从A_Ω到A内的函数，而右端的$\tilde{f}$则代表一个从$\mathscr{B}(A)_\Omega$到$\mathscr{B}(A)$内的函数，因此（3）式两端都表示$\mathscr{B}(A)$的元。

证 如果$M>\|(\lambda e-x)^{-1}\|$对于Γ上的一切λ来说都能成立，又如$2M\|y\|<1$，则可利用定理1.4.2估计$\tilde{f}(x+y)-\tilde{f}(x)$与（1）式右端之间的差，其范数将不超过$2M^3\|y\|^2$乘以$\Gamma$的长度与$\Gamma$上的$|f|$的最大值，再乘以$\frac{1}{2\pi}$。按照Fréchet导数的定

义，很容易验证（1）式成立。

为了求证（2）式，注意$\mathscr{B}(A)$一值积分也是向量值积分，而积分过程乃是求和的极限；因此将（2）式右端看作算子时，任取$y\in A$，都有

$$(5)\quad \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I-R_x)^{-1}(\lambda I-L_x)^{-1}d\lambda\right](y)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)[(\lambda I-R_x)^{-1}(\lambda I-L_x)^{-1}(y)]d\lambda.$$

然后，设

$$(\lambda I-R_x)^{-1}(\lambda I-L_x)^{-1}(y)=z,$$

经过以下计算，有

$$\begin{aligned} y&=(\lambda I-L_x)(\lambda I-R_x)(z)\\ &=(\lambda I-L_x)(\lambda z-zx)\\ &=(\lambda I-L_x)(z)\cdot(\lambda e-x)\\ &=(\lambda z-xz)(\lambda e-x)\\ &=(\lambda e-x)z(\lambda e-x).\end{aligned}$$

于是得到

$$(\lambda e-x)^{-1}y(\lambda e-x)^{-1}=z.$$

这就证明了（5）式右端的被积函数与（1）式右端的被积函数完全相同。因此，（2）作为（1）的算子形式的表达式是正确的。

我们将利用（2）求证$\tilde{f}$是一个从A_Ω到A内的连续可微映射。设x为点列$\{x_n\}$的极限点，积分路线Γ在Ω内围绕除去有限个n以外的所有的$\sigma(x_n)$。这时$(D\tilde{f})x_n$由（2）式给出，只须将被积函数中的x换成x_n。由于

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty}(\lambda e-x_n)^{-1}=(\lambda e-x)^{-1}$$

在Γ上一致收敛，相应地（2）式右端的被积函数中也有

$$(7)\quad \begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\lambda I-R_{x_n})^{-1}=(\lambda I-R_x)^{-1},\\ &\lim_{n\to\infty}(\lambda I-L_{x_n})^{-1}=(\lambda I-L_x)^{-1},\end{aligned}$$

在Γ上一致收敛；因此映射$x \mapsto (D\tilde{f})_x$是连续的，或者说，$\tilde{f}$在Ω内连续可微。

至于（3）式，其实是（2）式的另一种写法，因为$R_x = L_X + C_x$。

如果将（2）式中的积分路线Γ选为中心在原点，半径$r > 3\|x\|$的一个圆周；那么，对于Γ上的每个λ，都有

$$\|(\lambda I - L_x)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} L_x^n \right\|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} \|x\|^n$$

$$= \frac{1}{r - \|x\|},$$

因而

$$(8) \qquad \|(\lambda I - L_x)^{-1}\| \, \|C_x\| \leqslant \frac{2\|x\|}{r - \|x\|} < 1.$$

尽管现在考虑的Banach代数A未必是交换代数，但是定理1.6.3的前一部分计算仍可应用于$(Q\tilde{f})(L_x;\ C_x)$，得出

$$(9) \qquad (Q\tilde{f})(L_x;\ C_x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \tilde{f}^{(m)}(L_x) C_x^{m-1}.$$

如果我们能够证明：对于任何$y \in A$，以及每个$g \in H(\Omega)$，都有

$$(10) \qquad \tilde{g}(L_x)y = \tilde{g}(x)y;$$

那么，由（3）与（9）立即可得（4）。而求证（10）并不困难，因为

$$\tilde{g}(L_x)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(\lambda)(\lambda I - L_x)^{-1} y d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} y d\lambda$$

$$= \tilde{g}(x)y. \qquad \square$$

饶有趣味的是，为了求证（4）式而选取的圆周积分路线Γ

的半径 $r>3\|x\|$ 是完全必要的。因为本章习题26将给出一个例子，如果 f 在距离原点 $3\|x\|$ 的地方有一个奇点，级数（4）可能不再收敛。这表明常数3绝不是偶然的。

另外，还可以说（4）是定理1.6.8的（2）的一般形式。因为，如果 A 是交换代数，将有 $C_x=0$；这时，级数（4）就只剩下 $m=1$ 的项。

1.6.6 定理（反函数定理） 如果 W 是 Banach 空间 X 的一个开子集，映射 $F:W\to X$，是连续可微的，且对每个 $x\in W$ 来说，$(DF)_x$ 都是 $\mathscr{B}(X)$ 的可逆元，那么，每个点 $a\in W$ 都有一个邻域 U 使得：

(a) F 在 U 内是一对一的；

(b) $F(U)=V$ 是 X 的一个开子集；

(c) $F^{-1}:V\to U$ 连续可微。

定理的结论可以简略地说成是：F 是一个局部微分同胚。

证 为了简化证明过程，我们将 a 平移到原点。实际上，如果 $a\in W$，$T=(DF)_a$，又如

（1） $f(x)=T^{-1}[F(a+x)-F(a)]$ $(x\in W-a)$，

那么，f 满足题设的各项条件，只是原来的 W 换成了 $W-a$。倘若 f 能使各项结论成立，则 F 也将是如此。所以，无妨用 f 代替 F。换句话说，可以不失一般性而假定

（2） $0\in W$；$F(0)=0$；$(DF)_0=I$。

这时，只须求证在原点处有一个邻域 U 适合 (a)，(b) 和 (c)。

固定 α，$0<\alpha<1$，定义

（3） $\phi(x)=x-F(x)$ $(x\in W)$。

于是 $(D\phi)_0=0$，又因 ϕ 在 W 内是连续可微的，所以有中心在原点的一个开球 $B\subset W$，使得 $x\in B$ 时，有

（4） $\|(D\phi)_x\|<\alpha$。

任取 $x'\in B$，$x''\in B$，作 $x_t=(1-t)x'+tx''$，以及

（5） $\psi(t)=\phi(x_t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。

由于 $\psi:[0,1]\to X$ 是连续可微的，根据微分法的链式法则，有

(6) $\quad \psi'(t)=(D\phi)_x(x''-x') \quad (x=x_t)$。

利用（4）式可得

(7) $\quad \|\psi'(t)\|\leqslant\alpha\|x''-x'\|$，

注意$x_t\in B$，当然，这里利用了B的凸性。因为

(8) $$\phi(x'')-\phi(x')=\psi(1)-\psi(0)=\int_0^1\psi'(t)dt,$$

我们可以从（7）式得知ϕ适合Lipschitz条件

(9) $\quad \|\phi(x'')-\phi(x')\|\leqslant\alpha\|x''-x'\| \quad (x',x''\in B)$。

然后，由（3）式导出

(10) $\quad \|F(x'')-F(x')\|\geqslant(1-\alpha)\|x''-x'\| \quad (x',x''\in B)$。

这蕴涵F在B内是一对一的。还有，如果$G: F(B)\to B$由$G(F(x))=x$定义，那么，（10）式表明G是连续的。

我们的下一个目标是求证$F(B)\supset(1-\alpha)B$。

选定$y\in(1-\alpha)B$。记$x_0=0$，$x_1=y$。假定$n\geqslant1$时存在这样的$x_0,x_1,\cdots,x_n$能有

(11) $\quad x_i=y+\phi(x_{i-1}) \quad (1\leqslant i\leqslant n)$，

以及

(12) $\quad \|x_i-x_{i-1}\|\leqslant\alpha^{i-1}\|y\| \quad (1\leqslant i\leqslant n)$。

（这些条件当$n=1$时是成立的。）根据（12）式，可得

(13) $$\|x_n\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|x_i-x_{i-1}\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}\|y\|$$
$$\leqslant(1-\alpha)^{-1}\|y\|.$$

这表明$x_n\in B$，$\phi(x_n)$存在，因此能够定义

(14) $\quad x_{n+1}=y+\phi(x_n)$。

将（14），（11）和（9）结合起来，就有

(15) $\quad \|x_{n+1}-x_n\|=\|\phi(x_n)-\phi(x_{n-1})\|\leqslant\alpha\|x_n-x_{n-1}\|$。

（14）和（15）表明，归纳假设当n被$n+1$替换时仍然成立，并且这个过程能够继续进行，从而产生一个序列$\{x_n\}$，对于所有的n，（11）和（12）都成立。由于$\alpha<1$，根据（12）式可知$\{x_n\}$

是一个Cauchy序列，而(13)式将保证该序列能收敛于某个$x\in B$。最后，(11)和(3)蕴涵$F(x)=y$。

取$V=(1-\alpha)B$，$U=G(V)=B\cap F^{-1}(V)$，那么，结论(a)和(b)均已成立；剩下来的工作是，求证G在V内连续可微。

设$y\in V$，$y+k\in V$，$k\neq 0$；$x=G(y)$，$x+h=G(y+k)$；记$S=(DF)_x$。这时

$$\begin{aligned}G(y+k)-G(y)-S^{-1}k&=h-S^{-1}k\\&=S^{-1}(Sh-k)\\&=-S^{-1}[F(x+h)-F(x)-Sh].\end{aligned}$$

根据(10)，有$(1-\alpha)\|h\|\leqslant\|k\|$，因而

$$\frac{\|G(y+k)-G(y)-S^{-1}k\|}{\|k\|}\leqslant\|S^{-1}\|\frac{\|F(x+h)-F(x)-Sh\|}{(1-\alpha)\|h\|},$$

并且，$k\to 0$蕴涵$h\to 0$；既然$S=(DF)_x$，那么，上述不等式表明$S^{-1}=(DG)_y$。换句话说，即

(16) $$(DG)_y=[(DF)_{G(y)}]^{-1}\qquad(y\in V).$$

由于G将V连续地映入$\mathscr{B}(X)$内，又因为逆映射在$\mathscr{B}(X)$内是连续的（定理1.4.2），所以(16)表明$y\mapsto(DG)_y$是V到$\mathscr{B}(X)$内的一个连续映射。 □

1.6.7 定理 如果A是交换Banach代数，开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，$x\in A_\Omega$；还有某个$f\in H(\Omega)$的导数f'在$\sigma(x)$上没有零点，那么，x将有一个邻域$U\subset A_\Omega$使得$\tilde{f}$在U上的限制是一个微分同胚，其值域是A的一个开子集。

证 根据定理1.5.4的(e)，$\tilde{f}'(x)$在A内可逆。再利用定理1.6.3即可得知$(D\tilde{f})_x$在$\mathscr{B}(A)$内可逆。由于$y\mapsto(D\tilde{f})_y$连续地将Ω映入$\mathscr{B}(A)$，又因为$\mathscr{B}(A)$的可逆元构成一个开集，所以x有一个邻域，$(D\tilde{f})_y$在这个邻域内可逆。然后，应用定理1.6.6就可证得本定理。 □

也许有的读者曾经期望过这样的结果：只要$f\in H(\Omega)$在Ω内的任一分支内都不是常数值，$\tilde{f}$就是A_Ω到A内的一个开映射．那么，必须指出，这个命题不能成立，本章习题17将给出一个实例．定理 1.6.7 仅仅证明了，$\tilde{f}$在$(D\tilde{f})_x$为可逆元的x点附近才是开映射。

f'在$\sigma(x)$上没有零点这一假设，意味着在某个包含了$\sigma(x)$的开集上f是局部一对一的。后面的定理 1.6.9 将要指出，如果不曾假定A是交换代数，那么，这种局部条件将不蕴涵$\tilde{f}$在x为开映射。然而，一个类似的整体定理（定理 1.6.8）却被弄清楚是真实的。

1.6.8 定理 如果A是Banach代数，开集$\Omega\subset \mathbf{C}$，$f\in H(\Omega)$，并且f在Ω内是一对一的，那么，$\tilde{f}$是A_Ω到$A_{f(\Omega)}$上的一个微分同胚。

证 设$g:f(\Omega)\to\Omega$是f的反函数．由于$g\circ f$与$f\circ g$分别是在Ω内和在$f(\Omega)$内的恒等映射，从定理 1.5.7 可知$\tilde{g}\circ\tilde{f}$是A_Ω内的恒等映射，因而$\tilde{f}$是一对一的；又知$\tilde{f}\circ\tilde{g}$是$A_{f(\Omega)}$内的恒等映射，所以$A_{f(\Omega)}$是$\tilde{f}$的值域。既然$\tilde{f}$及其反函数$\tilde{g}$都是连续可微的（定理 1.6.5），那么，定理已经得证。 □

1.6.9 定理 如果$A=\mathscr{B}(X)$，其中的X是$\dim X>1$的复Banach空间，开集$\Omega\subset\mathbf{C}$，$f\in H(\Omega)$，又设f在Ω内并非一对一的，那么，某个$T_0\in A_\Omega$将有一个这样的邻域U，$\tilde{f}(U)$不能包含$\tilde{f}(T_0)$的邻域。

因而，$\tilde{f}$在T_0不是开映射。

证 按照题设，Ω内至少有两个点$\alpha\neq\beta$的对应值$f(\alpha)$与$f(\beta)$相等，即$f(\alpha)=f(\beta)=c$。设Y是X的一个闭子空间，余维数为 1，选取$x_1,x_2\in X$，$x_i\neq 0$ $(i=1,2)$，且使x_2在Y内而x_1不在Y内．然后定义$T_0\in A$如下：

(1) $\quad T_0x_1=\alpha x_1; \qquad T_0y=\beta y \quad$ 于 $\quad y\in Y.$

如果$\lambda\neq\alpha$且$\lambda\neq\beta$，可以用$(\lambda-\alpha)^{-1}$乘x_1和$(\lambda-\beta)^{-1}$乘y来定义$(\lambda I-T)^{-1}$。这时$\sigma(T_0)=\{\alpha,\beta\}$，且$T_0\in A_\Omega$。由定理1.

5.11的（a）得到

（2）　$\widetilde{f}(T_0)=cI$.

置$x_3=x_1+x_2$，设M是由x_3所生成的X的一维子空间，再设δ是从T_0x_3到M的距离.可以肯定$\delta>0$，这是因为$T_0x_3=\alpha x_1+\beta x_2$，又$\alpha\neq\beta$。设$\Omega_0$为$\Omega$的含有$\alpha$的和含有$\beta$的分支的开集（这样的分支有一个或两个）。然后作$T_0$的一个邻域$U$，它所包含的$T\in A$均满足条件

（3）　$\|T-T_0\|<\dfrac{\delta}{\|x_3\|}$　以及　$\sigma(T)\subset\Omega_0$.

我们将要求证$\widetilde{f}(U)$不包含$\widetilde{f}(T_0)+\eta S$，其中$\eta\neq 0$，至于$S\in A$则定义为

（4）　$Sx_1=x_3$;　$Sy=0$　于　$y\in Y$.

证明的方法是指出内在的矛盾。设$\sigma(T)\subset\Omega_0$，$\eta\neq 0$，并且

（5）　$\widetilde{f}(T)=\widetilde{f}(T_0)+\eta S=cI+\eta S$.

这时，将有

（6）　$\widetilde{f}(T)x_3=(c+\eta)x_3$，　$\widetilde{f}(T)y=cy$　于　$y\in Y$.

因此$c+\eta$是$\widetilde{f}(T)$的一个特征值，相应的特征空间为M。由于$f-(c+\eta)$在α和β上均不等于零，它在Ω_0的任一分支内也就不会恒等于零；根据定理1.5.11的（c），这时T应当有一个特征值γ使$f(\gamma)=c+\eta$。该定理的（a）还告诉我们，相应的特征空间位于M之内，既然$\dim M=1$，那么，这个特征空间将与M相等。因此$Tx_3\in M$。按照当初选取δ的方法，应当有

（7）　$\delta\leqslant\|Tx_3-T_0x_3\|\leqslant\|T-T_0\|\,\|x_3\|$.

这将与（3）抵触，所以T不在U内。□

1.6.10 指数函数

早在定义1.3.1中，作为向量级数最重要的例子，我们已经定义指数函数

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

它有一些简单的性质，如

（1） $\exp(0)=e$；

以及，对于两个可交换元x，y，即有$xy=yx$时，它遵从下列泛函方程

（2） $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

现在，我们将前面所得到的一些结果具体应用到指数函数上，以揭示出它的若干更深刻的性质。

(a) 如果$\sigma(x)$不包含两个点之间的差是$2\pi i$的整数倍的那些点，那么，$\sigma(x)$的紧性表明在某个开集$\Omega\supset\sigma(x)$内exp是一对一的；因此根据定理1.6.8可知，exp是从x的邻域A_Ω到A内的一个微分同胚。

(b) 由定义1.5.3的（2）式，可以直接验证

$$\widetilde{\exp}(x)=\exp(x).$$

然后利用定理1.6.5的（4），以及$f(\lambda)=\exp(\lambda)$恒有$f^{(m)}=f$ $(m\geqslant1)$，就能得到exp在点x处的Fréchet导数是

$$(D\exp)_x=\exp(x)\tilde{\Phi}(C_x),$$

其中的Φ是整函数

$$\Phi(\lambda)=\frac{\exp(\lambda)-1}{\lambda}.$$

Φ的零点是$2k\pi i$，$k=\pm1$，$\pm2,\cdots$。如果它们都不曾落在$\sigma(C_x)$内，那么，根据谱映射定理，$\tilde{\Phi}(C_x)$是可逆的，于是$(D\exp)_x$也可逆；从而在邻近x点处，exp将是微分同胚。

(c) 下一章我们就要讲到

$$\sigma(C_x)\subset\sigma(x)-\sigma(x)$$

（定理2.4.3）。这提供了在上述(a)与(b)之间的一个环节。

(d) 如果A是交换代数，那么，对于每个$x\in A$来说，$(D\exp)_x$都是可逆的，因为它只是简单地以$\exp(x)$去乘A的一个可逆元（定理1.6.3的（2））。因而exp是一个局部同胚，正如读者所熟知的$A=\boldsymbol{C}$的情况一样，但是，如果像在定理1.6.9所说的那样，$A=\mathscr{B}(X)$，那么，exp将不是A到A内的一个开

映射。

1.7 可逆元群

1.7.1 引言

这一节，我们将研究由Banach 代数 A 的全体可逆元构成的乘法群$G=G(A)$的构造。

用G_1表示G的含有单位元 e 的那个分支。按照分支的定义，G_1是G的所有含有 e 的子集的并集。有时，G_1称为G的主分支。

由1.6.10的（2）式可以肯定，当$x\in A$时，$\exp(x)$必有可逆元$\exp(-x)$，因此，群G包含了指数函数的值域

$$\exp(A)=\{\exp(x):\ x\in A\}.$$

也就是说，恒有

$$\exp(A)\subset G.$$

此外，由于在G内的乘法及其逆运算都是连续的，G是一个拓扑群。

1.7.2 定理 如果$G=G(A)$是Banach 代数A的可逆元群，G_1是G的主分支，那么

(*a*) G_1是G的一个开的正规子群；

(*b*) G_1是由$\exp(A)$生成的群；

(*c*) 若A加强条件为交换代数，则有$G_1=\exp(A)$。

证 (*a*) 定理1.4.2表明，每个$x\in G_1$都是一个开球$U\subset G$的中心。由于U与G_1相交，U又是连通的，故$U\subset G_1$，因此G_1是开集。

如果$x\in G_1$，那么$x^{-1}G_1$是G的一个连通子集，它含有$x^{-1}x=e$。因此每个$x\in G_1$都使$x^{-1}G_1\subset G_1$。这表明G_1是G的一个子群。此外，对于每个$y\in G_1$来说，$y^{-1}G_1y$都同胚于G_1，因而是连通的，并含有e。于是$y^{-1}Gy\subset G_1$。由代数学可知，这样的G_1是G的一个正规子群。

(*b*) 设Γ为由$\exp(A)$生成的群。用$E_n(n=1,2\cdots)$表示由

$\exp(A)$ 的 n 个元作出的乘积的全体所构成的集合。由于每当 $y\in\exp(A)$ 时都有 $y^{-1}\in\exp(A)$ 。所以Γ是诸集E_n的并集。因为任意两个连通集的积集仍是连通集，应用归纳法即可证明每个E_n都是连通集。既然每个E_n均含有 e ，那么，$E_n\subset G_1$。因此Γ是G_1的一个子群。

接下来，注意到$\exp(A)$有非空的内部，相对于G；因此Γ也有非空的内部，相对于 G。既然 Γ 是一个群，又因为乘以任何$x\in G$的乘法都是一个从G到G上的同胚，所以Γ是开集。

于是，Γ在G_1内的各个陪集以及这些陪集的任何并集全都是开集。然而，Γ 也可视为它的诸陪集的并集的余集，这样，Γ又将是闭集，相对于G_1。

由于Γ是G_1内的一个既开又闭的子集，G_1又是连通的，因此$\Gamma=G_1$。

(c) 在前面讨论指数函数时已经指出，如果 A 是交换代数，则对于任何$x, y\in A$，exp都满足泛函与程

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y).$$

这表明$\exp(A)$是一个群。但是，(b)中又已证明G_1是由 $\exp(A)$ 生成的群，也就是说，G_1 是含有$\exp(A)$ 的最小子群；因此，必定是$G_1=\exp(A)$。 □

1.7.3 定理 如果$G=G(A)$是交换 Banach 代数 A 的可逆元群，G_1是G的主分支，那么

(a) 当$x\in G$并且有某个正整数 n 使$x^n\in G_1$ 时，必定$x\in G_1$；

(b) 商群G/G_1不包含有限阶的元，除非是单位元。

证 (a) 根据题设，由定理1.7.2的(c) 可知，有某个 $a\in A$ 使$x^n=\exp(a)$。记$y=\exp(n^{-1}a)$以及$z=xy^{-1}$。由于$y\in G_1$，下面只须求证$z\in G_1$。

A的交换性表明

$$z^n=x^ny^{-n}=\exp(a)\exp(-a)=e.$$

置$f(\lambda)=\lambda z-(\lambda-1)e$，并设

$$E=\{\lambda\in \mathbf{C}:f(\lambda)\in G\}.$$

如果$\alpha \in \sigma(z)$，则$\alpha^n \in \sigma(z^n)=\sigma(e)=\{1\}$．当$\lambda \in E$时，将由此得出（$\lambda-1)^n=\lambda^n$．这个方程在$\mathbf{C}$内只有$n-1$个解．因而$E$是$\mathbf{C}$内的连通集，相应地$f(E)$必然是$G$的一个连通子集，它含有$f(0)=e$．所以$f(E)\subset G_1$．作为特款，$z=f(1)\in G_1$．

(b) 如果商群G/G_1含有一个n阶元aG_1，那么，有$(aG_1)^n=eG_1$，亦即$a^nG_1=eG_1$．这时须$a^n \in G_1$，但由(a)知将有$a \in G_1$．于是$aG_1=G_1=eG_1$．换句话说，所设的n阶元aG_1必定是单位元eG_1． □

习 题

以下各题中用到符号A时，如果没有其它的说明，总是表示一个Banach代数．

1．设$x \in A$，$y \in A$

(a) 如果x与xy都是A内的可逆元，试证y是可逆元．

(b) 如果xy与yx都是A内的可逆元，试证x与y在A内可逆．（可交换的特款曾经在定理1.4.3与定理1.5.4的求证过程中用到，但未曾说明．）

(c) 说明可能有$xy=e\neq yx$．

例如，考虑**左、右移位子**S_L与S_R：在由非负整数集上的函数f组成的Banach空间内定义的

$$(S_Rf)(n)=\begin{cases}0 & \text{于}n=0,\\ f(n-1) & \text{于}n\geqslant 1;\end{cases}$$

$$(S_Lf)(n)=f(n+1)\quad \text{于}\quad n\geqslant 0.$$

(d) 如果$xy=e\neq yx$，试证yx是非平凡的幂等元．

(e) 如果$\dim A<\infty$，试证：只要$xy=e$，就有$yx=e$．

2．设$x \in A$，$y \in A$.

(a) 试证：如果$e-xy$可逆，则$e-yx$也可逆．

（提示：记$(e-xy)^{-1}=z$，然后考虑$e+yzx$.）

(b) 如果$\lambda \in \mathbf{C}$，$\lambda\neq 0$，又$\lambda \in \sigma(xy)$；试证$\lambda \in \sigma(yx)$．然后说明有这样的实例：$\sigma(xy)$含有0，而$\sigma(yx)$不含有0．

(c) 试证：当 x 为可逆元时，恒有$\sigma(xy)=\sigma(yx)$。

3．设 A 为交换Banach代数，$x\in A$不是可逆元．定义

$$S=\{xy:y\in A\}。$$

试证：(a) $S\neq\varnothing$；

(b) $e\overline{\in}S$；

(c) S 是 A 的一个线性子空间；

(d) 若$z\in A$，$s\in S$，则有$zs\in S$。

4．设开集$\Omega\subset\mathbf{C}$，f：$\Omega\to A$和ϕ：$\Omega\to\mathbf{C}$ 是全纯映射；试证 $f\phi:\Omega\to A$是全纯映射．（在求证定理 1.4.3 的过程中曾经用到 $\phi(\lambda)=\lambda^n$的特款。）

5．定理“$\sigma(x)$绝不会是空集”的另一种证明方法基于定理 1.3.8(Liouville) 以及$\lambda\to\infty$时 $(\lambda e-x)^{-1}\to 0$ 的事实．试详述求证过程。

6．推广在求证定理1.4.3的过程中所得到的（5）式．即，试证预解式R_λ的 n 阶导数为

$$R_\lambda^{(n)}=(-1)^n n!R_\lambda^{n+1}\qquad(n\geqslant 1)。$$

7．如果每个非零元素$x\in A$都有对应的$y\in A$使得 $xy=e$，那么，A等距同构于$\mathbf{C}$，试证之。

8．如果对于$x\in A$来说，在A内有这样一个序列$\{y_n\}$，它满足条件

$$\|y_n\|=1；$$

$$\lim_n xy_n=0=\lim_n y_nx；$$

那么，x 称为**拓扑零因子**。

(a) 试证可逆元群$G(A)$的每个边界点 x 都是一个拓扑零因子．（提示：取$y_n=x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\|$，其中$x_n\to x$。）

(b) 试问哪些Banach代数没有非零的拓扑零因子？

9．取$K=\{\lambda\in\mathbf{C}:1\leqslant|\lambda|\leqslant 2\}$，置 $f(\lambda)=\lambda$．设 A为含有 1 和 f 的$C(K)$的最小闭子代数，再设B 为含有 f 和 $1/f$ 的 $C(K)$的最小闭子代数。

试描述$\sigma_A(f)$与$\sigma_B(f)$。

当K为一个圆时，作同样的讨论。

10．试证：对于一切$x\in A$，

(a) 存在一个常数$c>0$使得$c\|x\|^2\leqslant\|x\|^2$，当且仅当存在一个常数$d>0$使得$d\|x\|\leqslant p(x)$成立；

(b) $\|x\|^2=\|x^2\|$成立，当且仅当$\|x\|=\rho(x)$成立。

11．任给$x, y\in A$，如果有一个常数M（取决于x与y）．使得

$$\|\exp(\lambda x)\cdot y\cdot\exp(-\lambda x)\|\leqslant M$$

对于一切$\lambda\in\mathbf{C}$成立，那么$xy=yx$。试证之。

12．如果存在一个常数$c>0$使得$c\|x\|^2\leqslant\|x^2\|$对于一切$x\in A$成立，那么A是交换代数。试证之。

13．试证：对于一切$x\in A$，如果$\|x\|^2=\|x^2\|$都能成立，那么$n\geqslant 1$时$\|x\|^n=\|x^n\|$也必定成立。

14．设向量值函数$x:[\alpha, \beta]\to E$，$[\alpha, \beta]$是实数轴上的一个区间，E是一个Banach空间．试证：

(a) 如果$x(t)$在$[\alpha, \beta]$上可微，那么微分法的链式法则成立；

(b) 如果$x(t)$在$[\alpha, \beta]$上可积，那么微积分基本定理成立。

（提示：可先证“对于任何$f\in E^*$，恒有$[fx(t)]'=fx'(t)$”。）

15．试详细证明求证定理1.6.5时曾经用到的(6)式

$$\lim_n(\lambda e-x_n)^{-1}=(\lambda e-x)^{-1}$$

是在Γ上一致收敛。

16．设k是一个正整数，$\omega=\exp(2\pi i/k)$，又$f:A\to A$定义为$f(x)=x^2$。

(a) 如果$x_0\in A$满足条件

$$\sigma(x_0)\cap\omega^n\sigma(x_0)=\varnothing\qquad(n=1,2,\cdots,k-1),$$

试证在x_0的某个邻域内f是一个微分同胚。

(b) 当A为交换代数且x_0在A内可逆时，试证有与(a)相同的结论。

17．设A是全体形为

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

的矩阵作成的代数，其中α, $\beta \in \boldsymbol{C}$。

试证$|\alpha|+|\beta|$为A上的一个Banach代数范数。

定义$f(x)=x^2$ $(x \in A)$，求出$f(A)$。试问$f(A)$在A内是否为开集？f是否为开映射？

18. 试证：每个有单位元e的二维复代数A，或是按照坐标的加法和乘法同构于$\boldsymbol{C}^2$，或是同构于习题17中所描述的矩阵代数。（提示：这两种情况，一是存在$x \neq \pm e$而$x^2=e$；另一种则是存在$x \neq 0$而$x^2=0$，证明必有其中之一发生。）

试证有三维的非交换Banach代数存在。

19. 求证关系式

$$\exp(C_x)=\exp(R_x)\exp(-L_x),$$

然后利用它去推证公式

$$\exp(-x)y\exp(x)=[\exp(C_x)]_y$$

对于任何Banach代数A中的元素x, y都是正确的。

20. 设$A=C(T)$是在单位圆T上的全体复连续函数作成的代数，赋予上确界范数。

试证$C(T)$的两个可逆元是在G_1的同一陪集之中，当且仅当它们是T到由全体非零复数作成的集合的同伦映射。由此推断G/G_1同构于整数的加法群。

21. 设$A=M(\boldsymbol{R})$是§1.1.4的例7中所说的，实数轴上全体复Borel测度作成的卷积代数。试证G/G_1为不可列集。

求证本题的思路大致为：如果$\alpha \in \boldsymbol{R}$，设$\delta_\alpha$为集中于$\alpha$的单位质量。设$\delta_\alpha \in G_1$。这时，有某个$\mu_\alpha \in M(\boldsymbol{R})$使$\delta_\alpha=\exp(\mu_\alpha)$；因而对于$-\infty<t<\infty$，有

$$-i\alpha t=\hat{\mu}_\alpha(t)+2k\pi i,$$

其中的k是一个整数。由于$\hat{\mu}_\alpha$是有界函数，故$\alpha=0$。于是，δ_0是G_1内仅有的δ_α。因此G_1在G内的陪集没有哪一个能够包含一个

以上的δ_α。读者可补足证明的细节。

22. 设X为复Banach空间，开集$\Omega\subset \boldsymbol{C}$，$\alpha$是$\Omega$的一个孤立边界点，$f:\Omega\to X$是$\Omega$内的一个全纯$X$—值函数；$n$是一个非负整数，又当$\lambda\to\alpha$时

$$|\lambda-\alpha|^n \|f(\alpha)\|$$

有界。这时就说f在α有一个极点（阶$\leqslant n$）。

(*a*) 假定$x\in A$，又$(\lambda e-x)^{-1}$在$\sigma(x)$的每个点都有一个极点（读者注意，这种情况只有当$\sigma(x)$为有限集时才可能发生。）试证有一个非平凡的多项式P使$P(x)=0$。

(*b*) 作为(*a*)的特款，假定$\sigma(x)=\{0\}$，又$(\lambda e-x)^{-1}$在0有一个n阶极点。试证$x^n=0$。

23. 设S_R为作用于l^2上的右移位子，在习题1中已经给出其定义。再设$\{c_n\}$是一个复数序列，其中的$c_n\neq 0$，但$n\to\infty$时$c_n\to 0$。现在定义$M\in\mathscr{B}(l^2)$为

$$(Mf)(n)=c_n f(n) \qquad (n\geqslant 0),$$

以及$T\in\mathscr{B}(l^2)$为

$$T=MS_R.$$

(*a*) 计算$\|T^m\|$，$m=1,2,3\cdots$。

(*b*) 证明$\sigma(T)=\{0\}$。

(*c*) 证明T没有特征值。因此它的点谱是空集，尽管它的谱仅含有一个点。

(*d*) 证明$(\lambda I-T)^{-1}$在0没有极点。

(*e*) 证明T是一个紧算子。

24. 设$x\in A$，$x_n\in A$，又$\lim x_n=x$；开集$\Omega\subset\boldsymbol{C}$含有$\sigma(x)$的一个分支。试证当$n$足够大时，所有的$\sigma(x_n)$均与$\Omega$相交。

（提示：如果$\sigma(x)\subset\Omega\cup\Omega_0$，其中的$\Omega_0$是一个与$\Omega$不相交的开集，考虑函数$f$：在$\Omega$内取值1；在$\Omega_0$内取值0。）

25. 设C_R为$[0,1]$上的全体实连续函数作成的代数，赋予上确界范数。除了纯量仅取实数值以外，C_R将具备作为Banach代数所需的全部条件。

(*a*) 如果 $\phi(f)=\int_0^1 f(t)dt$，那么$\phi(1)=1$；当f为C_R内的可逆元时$\phi(f)\neq 0$，但是ϕ不是乘法的．

(*b*) 如果在C_R内与引言1.7.1同样定义G和G_1，试证G/G_1为2阶群．

因此对于实Banach代数来说，定理1.2.5不能成立；定理1.7.3的（*b*）也不能成立．读者可以尝试对实 Banach 代数求证后一个定理，以便看出将要在哪一步失败．

26．设A为全体复2×2矩阵作成的代数，将A视为$\mathscr{B}(\boldsymbol{C}^2)$，其中的$\boldsymbol{C}^2$赋予范数$\|(\alpha,\beta)\|=|\alpha|+|\beta|$（这样也就就确定了$A$上的范数），选定$x\in A$为

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(*a*) 求出$\|x\|$，$\sigma(x)$与$\sigma(C_x)$．

(*b*) 如果$t\in\boldsymbol{C}$，$t^2\neq 1$，又$f(t)=1/(t-\lambda)$；那么

$$\tilde{f}((y)=(te-y)^{-1}\qquad (y\in A,\ t\bar{\in}\sigma(y)).$$

计算$(D\tilde{f})_x$；求证$\sum(n!)^{-1}\tilde{f}^{(n)}(x)C_x^{n-1}$收敛，当且仅当$|t-1|>2$和$|t+1|>2$．

提示：(*b*) 的部分答案为

$$(D\tilde{f})_x\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a/(t-1)^2 & b/(t^2-1) \\ c/(t^2-1) & d/(t+1)^2 \end{pmatrix}.$$

27．如果将评注1.1.2中所说的添加单位元的过程施行于一个已经有了单位元的代数，将会出现具有二个单位元的代数吗？试作解释，

28．试证xy与yx恒有相同的谱半径，

（提示：$(xy)^n=x(yx)^{n-1}y$）．

29．设$x\in A$，又有某个正整数n使$x^n=e$．试证$x\in G_1$，并

且考虑能否将题设$x^n=e$换为更一般的条件。

30. 设$j\in A$是一个非平凡的幂等元。定义

$$B=jAj=\{jxj: x\in A\}.$$

(*a*) 试证B是一个Banach代数，其单元为j。

(*b*) 讨论$\sigma_B(x)$与$\sigma_A(x)$的关系。

第2章 交换Banach代数

这一章主要是论述交换 Banach代数的 Гельфанд 理论，虽然这个理论的某些成果能够应用到非交换代数上去。第1章的术语将继续使用，我们说到的 Banach 代数都有单位元，纯量域是 $\boldsymbol{C}$；而且，如果所讨论的问题涉及的Banach代数是交换代数时，仍须特别声明，否则将不认为它有交换性。

2.1 理想与同态

2.1.1 定义

理想 如果 Banach 代数 A 的一个子空间 J 能够使得各个 $x\in A$都有

$$xJ=\{xy:y\in J\}\subset J,$$
$$Jx=\{yx:y\in J\}\subset J,$$

那么，J 称为 A 的一个理想。

每个Banach代数A至少有两个理想，即A本身与$\{0\}$，分别称为**单位理想**与**零理想**。

如果 $J\neq A$，J 将称为 A 的一个**真理想**。A的一个真理想如不能含于另一更大的真理想之中，则称之为 A 的一个**极大理想**。

同态的定义已见于§1.2.1。当时我们曾经指出，复同态乃是一个线性泛函。其实，Banach 代数内的所有的同态都相当于Banach空间内的线性泛函。读者将要从本章的内容进一步认识到这一点。

核 从Banach代数 A 到另一Banach代数 B 内的一个同态 ϕ：$A\to B$ 中的零空间

$$\{x\in A:\phi(x)=0\}$$

称为同态ϕ的核。

注意到ϕ的线性，它的核确实是A的一个子空间。如果x属于ϕ的核，$y\in A$；那么$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)=0\cdot\phi(y)=0$，这表明$xy$属于$\phi$的核；同样可知$yx$也属于$\phi$的核。因此，同态$\phi$的核必定是代数$A$内的一个理想。如果$\phi$连续，它还是一个闭理想。

2.1.2 定理 关于Banach代数A的理想，有以下事实：

(*a*) 任何真理想都不能含有可逆元；

(*b*) 任何真理想在A内都不是稠密的；

(*c*) 任一理想J的闭包$\bar{J}$也是一个理想；

(*d*) 每个极大理想都是闭集；

(*e*) 每个真理想都包含在A的一个极大理想之中。

证 (*a*) 如果理想J含有一个可逆元，则将导致单位元$e\in J$，最后有$A\subset J$。这与题设J是真理想相抵触。

(*b*) 现在已知，可逆元群位于各个真理想的补集之中，而可逆元群又是开集，所以，任何真理想在A内都不是稠密的。

(*c*) 由Banach代数中乘法的连续性可证，

(*d*) 考虑A内任一极大理想M，由于M在A内不是稠密的，所以闭包$\bar{M}$仍是一个包含了M的真理想。再由M的极大性就得出$M=\bar{M}$。

(*e*) 任取A的一个真理想J。设$\mathscr{P}$是A的所有包含J的那些真理想作成的类。在$\mathscr{P}$内按照集合包含关系定义半序。如果$\mathscr{Q}$是$\mathscr{P}$的一个全序子类，那么，$\bigcup\limits_{J\in Q} J$显然是一个理想，而且是不含有可逆元的真理想。因此这个并集就是$\mathscr{Q}$的一个上界。根据Zorn引理，$\mathscr{P}$有极大元存在。 □

2.1.3 商空间·商映射·商范数.

设N为向量空间X的一个子空间。对每个$x\in X$，定义

$$\pi(x)=x+N=\{x+y:y\in N\}.$$

上述陪集的全体将构成一个向量空间，记作X/N，称为X关于模N的**商空间**。其中的加法与数量乘法定义为

$$(1)\qquad \pi(x)+\pi(y)=\pi(x+y),\quad \alpha\pi(x)=\pi(\alpha x).$$

易知X/N的零元是$\pi(0)=N$。由此可以证明，$\pi(x)=\pi(x')$当且仅当$x-x'\in N$。并且，当$\alpha=0$时，$\alpha\pi(x)=0\cdot\pi(x)=N$。

此外，如果$\pi(x)=\pi(x')$成立，将有

(2) $\alpha\pi(x)=\alpha\pi(x')$；

如果$\pi(x)=\pi(x')$与$\pi(y)=\pi(y')$同时成立，将有

(3) $\pi(x)+\pi(y)=\pi(x')+\pi(y')$。

因此，(1)所定义的π是从X到X/N上的一个线性映射，通常称之为**商映射**；其零空间为N。

如果X不仅是一个向量空间，而且还是一个交换代数，N是X的一个真理想，那么，由$x'-x\in N$与$y'-y\in N$以及恒等式

(4) $x'y'-xy=(x'-x)y'+x(y'-y)$

可知$x'y'-xy\in N$。这时又可以在X/N中合理地定义乘法

(5) $\pi(x)\pi(y)=\pi(xy)\qquad(x,\ y\in X)$。

不难验证X/N是一个代数；π是从X到X/N上的一个同态，其核即为N。

下面的定理2.1.4(a)即将证明：当X为赋范线性空间，$N\subset X$是一个闭子空间时，可以赋予X/N范数

(6) $\|\pi(x)\|=\inf\{\|x-z\|:z\in N\}$，

使之也成为赋范线性空间。(6)式定义的$\|\pi(x)\|$称为**商范数**。

定义(6)蕴涵$\|\pi(x)\|\leqslant\|x\|$，因此商映射π是连续的。

2.1.4 定理 设X是赋范线性空间，N是X的一个闭子空间，则商空间X/N有以下性质：

(a) X/N是赋范线性空间；

(b) 如果X还是Banach空间，那么X/N也是Banach空间；

(c) 如果X又是交换Banach代数，而且N是一个闭真理想，那么X/N也是交换Bannch代数。

证 (a)显然$x\in N$时有$\|\pi(x)\|=0$；如果$x\notin N$，则N为闭子空间这一事实蕴涵$\|\pi(x)\|>0$。

由数量乘法的定义可知$\|\alpha\pi(x)\|=|\alpha|\,\|\pi(x)\|$。任取$\varepsilon>0$，对应于$x_1, x_2\in X$，必有$y_1, y_2\in N$使得

(1) $\|x_i-y_i\|<\|\pi(x_i)\|+\varepsilon \qquad (i=1,2)$。

因而有

(2) $$\begin{aligned}\|\pi(x_1+x_2)\| &=\inf\{\|x_1+x_2-y\|:y\in N\}\\ &\leqslant\|x_1+x_2-(y_1+y_2)\|\\ &\leqslant\|\pi(x_1)\|+\|\pi(x_2)\|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

它将给出三角不等式，完成(a)的证明.

(b) 在X/N中任取一个Cauchy 序列$\{z_n\}$，其中必有子序列$\{z_{n_i}\}$满足条件

(3) $\|z_{n_i}-z_{n_{i+1}}\|<2^{-i} \qquad (i=1,2,\cdots)$.

根据定义2.1.3，我们可以选定x_i，$x_{i+1}\in X$使得

$$z_{n_i}=\pi(x_i) \quad , \quad z_{n_{i+1}}=(\pi x_{i_1})$$

并且$\|x_i-x_{i+1}\|<2^{-i}$。于是，$\{x_i\}$将是X内的Cauchy序列。既然X是完备空间，就应当有 $x\in X$ 使得$\|x_i-x\|\to0$。然后利用商映射π的连续性得出：在X/N内，$\{z_{n_i}\}$亦即$\{\pi(x_i)\}$收敛于$\pi(x)$。但是，一个Cauchy 序列若有收敛子序列，其整个序列也将是收敛的。因此X/N完备，(b) 得证。

(c) 任给$\varepsilon>0$，先选取x_1，$x_2\in X$以及y_1，$y_2\in N$使（1）式成立。注意到 $(x_1-y_1)(x_2-y_2)\in x_1x_2+N$，因此

(4) $$\begin{aligned}\|\pi(x_1x_2)\| &\leqslant\|(x_1-y_1)(x_2-y_2)\|\\ &\leqslant\|x_1-y_1\|\ \|x_2-y_2\|\\ &<(\|\pi(x_1)\|+\varepsilon)(\|\pi(x_2)\|+\varepsilon).\end{aligned}$$

从而可得

(5) $\|\pi(x_1x_2)\|\leqslant\|\pi(x_1)\|\ \|\pi(x_2)\|$.

然后，设e是X的位单元。如果在（5）式中取$x_1=e, x_2\bar{\in}N$，就有$\|\pi(e)\|\geqslant1$。但是$e\in\pi(e)$，按照商范数的定义，又有$\|\pi(e)\|\leqslant\|e\|=1$。所以$\|\pi(e)\|=1$。

至于 $xy=yx$ 时 $\pi(x)\pi(y)=\pi(y)\pi(x)$ 必定成立，则可由§2.1.3中的乘法定义（5）得知。

以上的工作证明了X/N是交换Banach代数。 □

有了前面的预备知识，现在我们就能够论述交换 Bancah 代

数的一些关键性的事实了。

2.1.5 定理 设A为一交换Banach代数，$\triangle$是A的全体复同态作成的集。这时有以下事实：

(a) A的每个极大理想都是某个$h\in\triangle$的核；

(b) 如果$h\in\triangle$，那么h的核是A的一个极大理想；

(c) $x\in A$在A内可逆，当且仅当对于每个$h\in\triangle$都有$h(x)\neq 0$；

(d) $x\in A$在A内可逆，当且仅当x不在A的任何真理想之内；

(e) $\lambda\in\sigma(x)$，当且仅当对于某个$h\in\triangle$有$h(x)=\lambda$；

(f) 对于任何$x\in A$和$h\in\triangle$，都有$h(x)\in\sigma(x)$；

(g) 对于任何$x\in A$和$h\in\triangle$，都有$|h(x)|\leqslant\rho(x)\leqslant\|x\|$.

证 (a)任取A的一个极大理想M。由定理2.1.2的（d）可知M为闭集，再由定理2.1.4的(c)可知A/M是一个Banach 代数。选取 $x\in A$，$x\bar{\in} M$，置

(1) $$J=\{ax+y: a\in A,\ y\in M\}.$$

J是A内的一个理想，它包含了M。因为A的任何元x都在J内（取$a=e$，$y=0$），故$J=A$；而且有某个$a\in A$，$y\in M$使$ax+y=e$。如果$\pi: A\to A/M$是商映射，将有$\pi(a)\pi(x)=\pi(e)$。因此Banach代数A/M的每个非零元$\pi(x)$在A/M内都是可逆的.根据Гельфанд-Мазур定理，A/M到$\boldsymbol{C}$上有一个同构j。置$h=j\circ\pi$。于是$h\in\triangle$，并且M是h的零空间。

(b) 早在定义2.1.1介绍核的概念时，就已经指出$h\in\triangle$的核$h^{-1}(0)$是A内的一个理想；它还是一个极大理想，因为它有余维数1。

(c) 如果$x\in A$在A内可逆，又$h\in\triangle$，那么

$$h(x)h(x^{-1})=h(xx^{-1})=h(e)=1,$$

因而$h(x)\neq 0$。如果$x\in A$不可逆，那么，集合

$$\{ax: a\in A\}$$

不含有e，因而是一个真理想，按照定理2.1.2的(e)，它包含在一个极大理想之内；于是由前面的（a）可知，它将被某个$h\in\triangle$零化。

(*d*) 定理2.1.2的(*a*)已经指出，可逆元不能含于任何真理想之内。至于逆命题的证明，则可由求证(*c*)的后一段得出。

(*e*) 是对于$\lambda e-x$应用(*c*) 所得的结果。

(*f*) 和 (*g*) 则是 (*e*) 的推论。 □

下面将要给出的两个定理，叙述中并不包含代数概念，但是都能够用 Baanch 代数的技巧予以证明。因此，它们可以看作是用Banach代数的理论解决分析学问题的实例。

2.1.6 定理 (Wiener引理) 设f 为R^n 上的一个函数，并且

$$(1)\qquad f(x)=\sum a_m e^{im\cdot x}\quad,\qquad \sum|a_m|<\infty\quad,$$

这两个和都扩张到全体$m\in Z^n$。如果每个 $x\in R^n$ 都有$f(x)\neq 0$，那么

$$(2)\qquad 1/f(x)=\sum b_m e^{im\cdot x}\quad,\qquad \sum|b_m|<\infty\quad,$$

一定成立。

定理也可以叙述为：如果绝对收敛的 Fourier 级数 $f(x)=\Sigma a_m e^{im\cdot x}$在$R^n$上不为零，那么$1/f(x)$ 也能够表示成绝对收敛的Fourier级数。

证 设 A 为所有用 (1) 式定义的函数f的集合，赋予范数$\|f\|=\Sigma|a_m|$。容易验证，A 按照函数的点态乘法作成一个交换Banach代数，其中的单位元就是常值函数1。对于各个$x\in R^n$来说，赋值

$$f\mapsto f(x)$$

是A上的一个复同态。根据题设条件 $f(x)\neq 0$，如果能够证明A没有其它的复同态，那么，定理2.1.5的(*c*)蕴涵f在 A 内可逆，这正是我们所期待的结论。

就$r=1,2,\cdots,n$，置$g_r(x)=\exp(ix_r)$，其中的x_r是x的第r个坐标。这时g_r与$1/g_r$均在A内，且范数都等于1。如果$h\in\triangle$，那么，由定理1.2.3的 (*c*)可知

$$|h(g_r)|\leqslant 1\ ,\quad |1/h(g_r)|=|h(1/g_r)|\leqslant 1\ .$$

因而有实数y_r使得

(3) $\quad h(g_r)=\exp(iy_r)=g_r(y) \qquad (1\leqslant r\leqslant n)$,

其中$y=(y_1, \cdots, y_n)$。如果P是一个三角多项式（这意味着P是由函数g_r与$1/g_r$的整数次幂作成的有限项线性组合），那么(3)式蕴涵

(4) $\quad h(P)=P(y)$,

因为h是线性的和乘法的。由于h在A上连续，又因为全体三角多项式的集合在A内稠密（由范数的定义即可看出），所以对于每个$f\in A$来说（4）式蕴函

(5) $\quad h(f)=f(y)$。

这就是说，同态h必定是f在y点的赋值。 □

在讲第二个应用的例子以前须先做一点准备。

设U^n为$\mathbf{C}^n$内全体点$z=(z_1, \cdots, z_n)$的集合，其中的$|z_i|<1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.换句话说，这个多圆柱$U^n$是$\mathbf{C}$内$n$个开的单位园盘$U$的笛卡儿积。我们定义$A(U^n)$为全体在$U^n$内全纯的函数$f$的集合，这些函数在闭包$\bar{U}^n$上连续。

2.1.7 定理如果$f_1, \cdots, f_k\in A(U^n)$使得

(1) $\quad |f_1(z)|+\cdots+|f_k(z)|>0$

对每个$z\in\bar{U}^n$成立，那么，一定存在$\phi_1, \cdots, \phi_k\in A(U^n)$使得

(2) $\quad f_1(z)\phi_1(z)+\cdots+f_k(z)\phi_k(z)=1$

对每个$z\in\bar{U}^n$成立。

证 $A=A(U^n)$是一个交换 Banach 代数，具有点态乘法和上确界范数。置

$$J=\left\{\sum_{i=1}^{k} f_i\phi_i: 诸\phi_i\in A\right\}.$$

显然J是A内的一个理想。如果定理不成立，那么，J内不含有单位元，因而J是一个真理想，它含于A的某个极大理想之内；按定理照2.1.5的(a)，有某个$h\in\triangle$将要零化J。

再置$g_r(z)=z_r$，$1\leqslant r\leqslant n$，这时$\|g_r\|=1$,因而$h(g_r)=w_r$，诸$|w_r|\leqslant 1$。设$w=(w_1, \cdots, w_n)$，这时$w\in\bar{U}^n$。且$h(g_r)=g_r(w)$。由于h是一个同态，因而对于每个多项式P来说，都有$h(P)$

$=P(w)$。但是多项式集合在$A(U^n)$内稠密（习题3），因此每个$f\in A$都有$h(f)=f(w)$。实质上，这里所用的是与证明Wiener引理相同的论据。

既然h零化J，那么将有$f_i(w)=0(1\leqslant i\leqslant k)$。这与题设条件（1）相抵触。

这一节的最后将要叙述的有关逼近性质的定理，是今后经常用到的。

2.1.8 定理 设$C_r(K)$是紧Hausdorff空间K的上全体实连续函数作成的实Banach代数，A是$C_r(K)$的子集，并且当$x, y\in A$时，$\max(x, y)$，$\min(x, y)$都属于A。如果$z_0\in C_r(K)$使得对于任何$t, s\in K$都有$x\in A$使$x(t)=z_0(t)$，$x(s)=z_0(s)$；那么$z_0\in\bar{A}$，此处的$\bar{A}$是A的范数拓扑的闭包。

证 任取$t_0\in K$，由题设，对任何$s\in K$（s也可以等于t_0）有A中的元x_s，使得$x_s(s)=z_0(s)$，$x_s(t_0)=z_0(t_0)$。因此对于任意的$\varepsilon>0$，有s的邻域$O(s)$使得$s_1\in O(s)$时，$|z_0(s_1)-x_s(s_1)|<\varepsilon$。这样，对每个$s\in K$都能得到$x_s\in A$和具有上述性质的$O(s)$。由于$\{O(s):s\in K\}$复盖$K$，而$K$是紧的，所以有有限个元$s_1$，…，$s_n$及其相应的$x_{s_1}$，…，$x_{s_n}$，使得$\bigcup\limits_{k=1}^{n}O(s_k)=K$；并且在$O(s_k)$中，$|x_{s_k}-z_0|<\varepsilon$。令$y=\max\{x_{s_1},\cdots,x_{s_n}\}$，则$y\in A$且$y(t_0)=z_0(t_0)$，$y(t)>z_0(t)-\varepsilon$，$t\in K$。

现在利用上述结果，取$s=t_0$，那么对于$t_0\in K$，有$y_{t_0}\in A$使$y_{t_0}(t_0)=z_0(t_0)$且$y_{t_0}(t)>z_0(t)-\varepsilon$，$t\in K$。这时，任给$\varepsilon>0$，将有$t_0$的邻域，$V(t_0)$，使得在$V(t_0)$中，$|y_{t_0}-z_0|<\varepsilon$。这样，对每个$t_0\in K$都能得到$y_{t_0}$和具有上述性质的$V(t_0)$。因为$\{V(t_0):t_0\in K\}$复盖$K$，所以有有限个元$t_1$，…，$t_m$及其相应的$y_{t_1}$，…，$y_{t_m}$使$\bigcup\limits_{k=1}^{m}V(t_k)=K$；令$z=\min\{y_{t_1},\cdots,y_{t_m}\}$，则$z\in A$且

$$z_0(t)-\varepsilon<z(t)<z_0(t)+\varepsilon\qquad(t\in K)。$$

上式即$\|z_0-z\|<\varepsilon$。因此$z_0\in\bar{A}$。 □

2.1.9 定理 (Stone-Weierstass). 设 $Cr(K)$ 是紧Hausdorff 空间K 上的全体实连续函数作成 的 实 Banach 代数, A 是$C_r(K)$的子代数; 如果

(i) 对任何$t\in K$, 有$x\in A$使$x(t)\neq 0$;

(ii) 对K中任何两个不同的元t, s, 有$y\in A$使$y(t)\neq y(s)$,

那么, A在$C_r(K)$内稠密, 并且$\bar{A}=C_r(K)$.

证 记$B=\bar{A}$, 先证B是$C_r(K)$的Banach子代数.

B显然是线性子空间. 当$x_0\in B$, $y_0\in B$时, 有A中点列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$使$\|x_n-x_0\|\to 0$, $\|y_n-y_0\|\to 0$, 这时$\{x_n\}$应为有界点列, 因而

$$\begin{aligned}\|x_ny_n-x_0y_0\| &\leqslant \|x_ny_n-x_ny_0\|+\|x_ny_0-x_0y_0\|\\ &\leqslant \|x_n\|\,\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\,\|y_0\|\to 0,\end{aligned}$$

于是, 由$x_ny_n\in A$可知$x_0y_0\in B$. 所以B是$C_r(K)$的子代数.

当$x\in B$时, 记$\|x\|=a$, 根据经典的Weierstrass 定理, 任给$\varepsilon>0$, 对于$t\in[-a, a]$, 有实数$a_1,\cdots,a_n$使得

$$\left|\,|t|-(a_1t+\cdots+a_nt^n)\right|<\varepsilon.$$

从而$\left|\,|x(s)|-(a_1x(s)+\cdots+a_nx^n(s))\right|<\varepsilon, (s\in K)$; 如果用$|x|$表示函数$|x(s)|$, 此即$\|\,|x|-(a_1x+\cdots+a_nx^n)\|<\varepsilon$. 于是, 当$x\in B$时, $|x|\in\bar{B}=B$. 由此可 以 推 知, 对 于 任 何 $x, y\in B$, $\max(x, y)=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$和$\min(x, y)=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$均属于$B$; 也就是说, B对于max和min封闭.

对于K中不同的元t, s, 由条件(i)(ii)可知, 有A中的x_1, x_2, x_3使得

$$x_1(t)=1,\quad x_2(s)=1,\quad x_3(t)\neq x_3(s);$$

这时$x_3(t)$与$x_3(s)$ 当中有一个不是0, 无 妨 设 $x_3(t)=1$, 于是$x_3(s)\neq 1$. 如果 $x_3(s)=0$, 取 z 为 x_2 与 x_3 的 线 性组合; 如果$x_3(s)\neq 0$, 取 z 为 x_3与x_3^2的线性组合, 总可以得到A中的元子使得$z(t)=a$, $z(s)=b$, 此处的a, b为任意实数.

现在, 应用定理2.1.8即可得出: $C_r(K)$的任何元 z_0 均含于

$\bar{B}=\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ 中，也就是说 $C_r(K)\subset\bar{A}$，因此A在$C_r(K)$ 内稠密，并且$\bar{A}=C_r(K)$。 □

推论 设$C(K)$是紧 Hausdorff 空将K上的全体复连续函数作成的Banach代数，A是$C(K)$的子代数。如果

(i) 对任何$t\in K$有$x\in A$使$x(t)\neq 0$;

(ii) 对K中任何不同的t, s，有$y\in A$使$y(t)\neq y(s)$;

(iii) A在复共轭之下是封闭的;

那么$\bar{A}=C(K)$。

证 记A中全体实函数作成的子集为A_r，则$\bar{A}_r=C_r(K)$。从而$\bar{A}=C(K)$。 □

2.2 Гельфанд变式

2.2.1 弱拓扑与弱＊拓扑

定义1.3.1曾经简略地介绍Banach空间内的弱收敛概念，现在，我们来进一步讨论这个问题。作为定义，在一般赋范线性空间E内，所谓一个序列$\{x_n\}$弱收敛于一个元$x_0\in E$，仍然是对于每个$A\in E^*$，数列$\{A(x_n)\}$收敛于$A(x_0)$。仔细分析一下这句话，就能得出，对于每个$\varepsilon>0$与每个$A\in E^*$，存在一个自然数$n=n(\varepsilon; A)$，使得$k>n$时恒有

$$|A(x_k)-A(x_0)|<\varepsilon$$

成立。

对于有穷多个线性泛函$A_1, \cdots, A_p\in E^*$，能够取

$$n=n(\varepsilon; A_1, \cdots, A_p)=\max_{1\leqslant i\leqslant p} n(\varepsilon; A_i),$$

只须$k\geqslant n$，就有

(1) $$|A_i(x_k)-A_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,p.$$

如果定义集合

(2) $$U(x_0; A_1,\cdots,A_p;\varepsilon)=\{x\in E: |A_i(x)-A_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,p\},$$

那么（1）式表明：

$$k \geqslant n\text{时}\quad x_k \in U(x_0;\ \Lambda_1,\cdots,\Lambda_p;\ \varepsilon).$$

因此，对于弱收敛来说，（2）式所定义的集合$U(x_0;\ \Lambda_1,\cdots,\Lambda_p;\ \varepsilon)$其实是$x_0$的一个邻域。

将x点的一切邻域所构成的集记作$\mathscr{V}(x)$，那么，这个集族必有下列属性：

$L1$。如果$V \in \mathscr{V}(x)$，那么$x \in V$；

$L2$。如果$V \in \mathscr{V}(x)$且$W \supset V$，那么$W \in \mathscr{V}(x)$；

$L3$。如果V，$U \in \mathscr{V}(x)$，那么$U \cap V \in \mathscr{V}(x)$；

$L4$。如果$V \in \mathscr{V}(x)$，那么必定存在一个$W \in \mathscr{V}(x)$，对于每个$y \in W$，都有$V \in \mathscr{V}(y)$。

这四个属性乃是一个集族能够成为点x的邻域族所应当满足的起码的条件，因此，也可以将$L1 \sim L4$作为点x的邻域的隐定义。

含有点x的一些集所构成的集族$\mathscr{B}$称为邻域族$\mathscr{V}(x)$的基，如果每个$V \in \mathscr{V}(x)$必定包含有$\mathscr{B}$中的集。

容易验证，由（2）定义的集族$U(x_0;\ \Lambda_1,\cdots,\Lambda_p;\ \varepsilon)$，当$\varepsilon$历遍一切正数；而$\Lambda_1,\cdots,\Lambda_p(p=1,2,\cdots)$历遍$E^*$中任意有穷个元时，即构成$x_0$的邻域族$\mathscr{V}(x)$的基。

现在可以作出以下定义。

弱拓扑　由（2）确定的集族$U(x_0;\ \Lambda_1,\cdots,\Lambda_p;\ \varepsilon)$赋予$E$一种拓扑结构，称之为$E$上的弱拓扑。

我们来考察赋范线性空间E的对偶空间E^*上的弱拓扑。用集族$U(\Lambda_0;\ X_1,\cdots,X_p;\ \varepsilon)$赋予$E^*$弱拓扑，其中的$X_1,\cdots,X_p$历遍$E^{**}$中的元（即$E^*$上的连续线性泛函）。注意到$E \subset E^{**}$，就看出$E^*$还有另一种弱拓扑，也就是集族$U(\Lambda_0;\ x_1,\cdots,x_p;\ \varepsilon)$，其中$x_1,\cdots,x_p$历遍$E$中任意一组有穷多个元。于是又有以下定义。

弱*拓扑　由上述集族$U(\Lambda_0;\ x_1,\cdots,x_p;\ \varepsilon)$赋予$E^*$一种拓扑结构，称为$E^*$上的弱*拓扑.

不难看出，在一般情况，E^*上的弱*拓扑是比弱拓扑更弱的

拓扑，或者说是更粗的拓扑；但是，如果E是自反空间，即 $E=E^{**}$，那么，E^*上的弱拓扑与弱 * 拓扑相同.

最后，我们不予证明而给出

Banach-Alaoglu 定理 赋范线性空间E的对偶空间E^*内的闭单位球$K=\{\Lambda: \|\Lambda\|=1\}$是弱 * 紧的.

2.2.2.定义

Гельфанп**变式** 设△为Banach 代数A上的全体复同态构成的集，$x\in A$；这时，由

(1) $\hat{x}(h)=h(x) \qquad (h\in\triangle)$

确定的△上的函数$\hat{x}$：$\triangle\to C$数称为x的Гельфанд变式.

设$\hat{A}$为全体$\hat{x}$构成的集，$x\in A$. △的Гельфанд拓扑是由$\hat{A}$导出的弱拓扑，即，使$\hat{x}$有连续性的最弱的拓扑，如果将△上的全体复连续函数的代数记作$C(\triangle)$，那么显然有$\hat{A}\subset C(\triangle)$.

由定理2.1.5的(a)和(b)可知，A 的极大理想与△的元素之间有一一对应的关系，△配备了它的 Гельфанд拓扑之后将称为A的**极大理想空间.**

术语Гельфанд变式也可用于A到$\hat{A}$上的映射$x\mapsto\hat{x}$.

代数A的根 就是A的所有极大理想的交集，记之为 rad$A$.

当rad$A=\{0\}$时，称A为**半单代数.**

2.2.3 定理 如果△是交换Banach代数A的极大理想空间，则下述结论是正确的：

(a) △是一个紧Hausdorff空间.

(b) Гельфанд变式是A到 $C(\triangle)$ 的子代数$\hat{A}$上的一个同态，它的核是rad$A$.

因此，Гельфанд变式是一个同构，当且仅当A是半单代数.

(c) 对于各个$x\in A$来说，$\hat{x}$的值域就是$\sigma(x)$.

因此，若将$|\hat{x}(h)|$在△上的极大值记作$\|\hat{x}\|_\infty$，就有

$$\|\hat{x}\|_\infty=\rho(x)\leqslant\|x\|$$

另外，$x\in$ rad$A$当且仅当$\rho(x)=0$.

证 我们先证(b)和(c).

设 $x, y \in A$，$\alpha \in \mathbf{C}$，$h \in \triangle$。这时，有

$$(\alpha x)\hat{}\,(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = (\alpha \hat{x})(h),$$

$$(x+y)\hat{}\,(h) = h(x+y) = h(x) + h(y)$$
$$= \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x}+\hat{y})(h),$$

以及

$$(xy)\hat{}\,(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h)$$
$$= (\hat{x}\hat{y})(h).$$

因而 $x \mapsto \hat{x}$是一个同态。它的核是集合

$$\{x \in A: \text{每个} h \in \triangle \text{都使} h(x) = 0\},$$

由定理 2.1.5 可知，这个集合是 A 的所有极大理想的交集，即 $\mathrm{rad}A$。于是(b)得证。

至于λ在$\hat{x}$的值域之内，则意味着有某个$h \in \triangle$能使$\lambda = \hat{x}(h) = h(x)$。定理2.1.5已经指出，这件事得以实现，当且仅当 $\lambda \in \sigma(x)$。现在又证得(c)。

以下求证(a)。设A^*为A的对偶空间（视为Banach 空间），并设K为A^*的范数闭单位球；根据 Banach-Alaoglu 定理，K是弱 * 紧的。由定理1.2.3的(c)可知$\triangle \subset K$. $\triangle$的Гельфанд拓扑显然是A^*的弱*拓扑在$\triangle$上的限制。因此，只须证明$\triangle$是A^*的一个弱 * 闭子集。

设Λ_0在$\triangle$的弱*闭包之内，我们来求证

(1) $\qquad \Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y \qquad (x, y \in A)$

以及

(2) $\Lambda_0 e = 1$.

请读者注意，(2)是必要的；否则Λ_0将是零同态，它不在$\triangle$内。

选定$x, y \in A$, $\varepsilon > 0$. 置

(3) $\qquad W = \{\Lambda \in A^*: |\Lambda z_i - \Lambda_0 z_i| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant 4\}$,

其中$z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$, $z_4 = xy$. 这时，W是Λ_0的一个弱 * 邻域，因而含有一个$h \in \triangle$。就这个h而言，有

(4) $\qquad |1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon$,

它给出了(2)式；还有

$$A_0(xy)-A_0xA_0y=[A_0(xy)-h(xy)]+[h(x)h(y)-A_0xAy_0]$$
$$=[A_0(xy)-h(xy)]+[h(y)-A_0y]h(x)$$
$$+[h(x)-A_0x]A_0y,$$

这又给出了

(5) $$|A_0(xy)-A_0xA_0y|<(1+\|x\|+\|y\|)\varepsilon,$$

由于(5)蕴涵(1)，因此(a)证讫。 □

早在讲述定理1.2.3的(c)时，我们就曾指出，Banach 代数的一切复同态都是连续的。下面将要看到，由交换 Banach 代数到半单代数的任何同态也将有同样的结论。

2.2.4 定理 如果A, B都是交换 Banach 代数，B还是半单代数；那么，从A到B的任一同态映射 Ψ: $A\to B$均为连续映射。

证 在A内任取序列$\{x_n\}$使$\lim x_n=x\in A$，相应地在B内有序列$\{\psi(x_n)\}$使$\lim\psi(x_n)=y\in B$.根据闭图象定理，只须求证$y=\Psi(x)$.

设$\triangle_A$与$\triangle_B$分别为A与B的极大理想空间。选定$h\in\triangle_B$，置$\phi=h\circ\Psi$。显然$\phi\in\triangle_A$。由定理1.2.3的(c)可知，h与ϕ都是连续的，因而，对于每个$h\in\triangle_B$，都有

$$h(y)=\lim h(\psi(x_n))=\lim\phi(x_n)$$
$$=\phi(x)=h(\psi(x)).$$

于是$y-\psi(x)\in\mathrm{rad}B$.既然$\mathrm{rad}B=\{0\}$，那么应当是$y=\Psi(x)$。 □

如果A, B都是半单代数，定理将有下面的重要的

推论 两个半单的交换 Banach 代数之间的每一个同构都是一个同胚。

当然，这个推论对于半单的交换 Banach 代数的任何自同构来说也是正确的。因此，半单代数的拓扑将完全由它的代数结构去确定。

定理2.2.3已经提到$\hat{A}$是$C(\triangle)$的一个子代数。但是，$\hat{A}$在$C(\triangle)$内按照上确界范数是否为闭集？下面的定理2.2.6将要指出，有时可以通过比较$x\in A$的$\|x^2\|$与$\|x\|^2$对此作出结论。

2.2.5 引理 如果A是交换 Banach 代数，$x\in A$, $x\neq0$；那么下面确定的两个数值

（1）　　$r=\inf\dfrac{\|x^2\|}{\|x\|^2}$，$s=\inf\dfrac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}$

必定适合关系式

$$s^2\leqslant r\leqslant s.$$

证　由 $\|\hat{x}\|_\infty\geqslant s\|x\|$ 可以推知，每个 $x\in A$ 都有

（2）　　$\|x^2\|\geqslant\|\hat{x}^2\|_\infty=\|\hat{x}\|_\infty^2\geqslant s^2\|x\|^2$.

因此　$s^2\leqslant r$.

然而，每个 $x\in A$ 又都有

（3）　　$\|x^2\|\geqslant r\|x\|^2$,

若是施行归纳法于 n，将能证得

（4）　　$\|x^m\|\geqslant r^{m-1}\|x\|^m$　　$(m=2^n,\ n=1,2,\cdots)$.

对(4)式求 m 次根，再让 $m\to\infty$，由谱半径公式与定理2.2.3得出

（5）　　$\|\hat{x}\|_\infty=\rho(x)\geqslant r\|x\|$　　$(x\in A)$.

因此　$r\leqslant s$.　□

2.2.6 定理　如果 A 是交换Banch代数，那么

(a) Гепьфанд 变式是一个等距（即，每个 $x\in A$ 都有 $\|x\|=\|\hat{x}\|_\infty$），当且仅当每个 $x\in A$ 都有 $\|x^2\|=\|x\|^2$;

(b) A 是半单代数且 $\hat{A}$ 在 $C(\triangle)$ 内闭，当且仅当存在 $K<\infty$ 使得每个 $x\in$ A都有 $\|x\|^2\leqslant K\|x^2\|$.

证　(a)只须应用引理2.2.5就可得证。因为，Гельфанд 变式是一个等距，当且仅当 $s=1$；而这又当且仅当 $r=1$.

(b)仍是应用引理2.2.5.K 的存在等价于 $r>0$，因而等价于 $s>0$。如果 $s>0$，那么映射 $x\mapsto\hat{x}$ 是一对一的，并且有连续的逆映射，所以 $\hat{A}$ 在 $C(\triangle)$ 内完备（因而是闭的）。反之，如果映射 $x\mapsto\hat{x}$ 是一对一的，$\hat{A}$ 在 $C(\triangle)$ 内又是闭的，那么开映射定理将蕴涵 $s>0$。　□

2.2.7 极大理想空间的例

有时，一个给定的交换Banach代数的极大理想空间很容易给予明确的描述。但是，另外一些情况则不然，下面我们来看几个例。

例1. $C(K)$的极大理想空间。

对于各个$x\in K$，定义线性泛函

$$h_x(f)=f(x).$$

显然，h_x是从$C(K)$到$\mathbf{C}$上的一个复同态，h_x也是f的Гельфанд变式，而且有

$$\hat{f}(h_x)=h_x(f)=f(x).$$

集合

$$M_x=\{f:\ f(x)=0\}$$

是h_x的核，因而M_x是一个极大理想。

这时，有以下事实：

(*a*)$C(K)$内的每个极大理想都可以表示为某个$x\in K$的M_x；

(*b*)每个从$\mathbf{C}(K)$到$\mathbf{C}$上的非零复同态都是一个上述的h_x；

(*c*)K内不同的点对应于不同的极大理想，也对应于不同的非零同态。

我们来给出证明。

设M是一个真理想，并且假定所有$x\in K$的$M_x\not\supset M$。那么，各个x都将有$f_x\in M$且$f_x(x)\neq 0$，因而$|f_x|^2$在x的一个邻域上将是严格正值的。K的紧性蕴涵，存在$x_1,\cdots,x_n\in K$，使得$f=|f_{x_1}|^2+\cdots+|f_{x_n}|^2$在$K$上是正数。于是$1/f\in C(K)$，这就是说，$f$在$C(K)$内可逆．但是$f=\sum\limits_{i=1}^{n}f_{x_i}\hat{f}_{x_i}\in M$，而$M$又是一个理想．这将与任一真理想不能含有可逆元的事实相抵触．因此必须有某个$x\in K$的$M_x\supset M$。如果M是极大理想，还将有$M_x=M$。

再设ϕ是一个从$C(K)$到$\mathbf{C}$上的非零同态，它的核是某个极大理想，记作M_x。但是h_x的核也是M_x。由于具有相同零空间的两个线性泛函彼此成比例，又因为ϕ与h_x在$C(K)$的单位元上都取值1，所以必定是$\phi=hx$。

最后，如有x_1，$x_2\in K$且$x_1\neq x_2$，由Урысон引理可知，存在$f\in C(K)$使$f(x_1)=0$，$f(x_2)\neq 0$。因此$h_{x1}\neq hx_2$，$M_{x_1}\neq M_{x_2}$。

以上事实表明$x\longleftrightarrow h_x$是K与Δ之间的一一对应。因此，我们

能够让K嵌入$\triangle$内，并且经常将$\triangle$与K视为一致。这种同化就所涉及的两个拓扑来说也是正确的：K的 Гельфанд 拓扑 τ_2 是从$C(K)$导出的弱拓扑，因而弱于原来的拓扑 τ_1。但是τ_1又是一个Hausdorff拓扑，所以$\tau_2=\tau_1$。

概括地说，K是$C(K)$的极大理想空间，而Гельфанд变式则是$C(K)$上的恒等映射。

例2. 回顾定理2.1.6中的讨论。设A为全体绝对收敛三角级数的集合。我们看到，那里的复同态是在R^n的点上赋值。因为A的元素就各个自变量来说都是以2π为周期。$\triangle$则是根据

$$(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto(e^{ix_1},\cdots,e^{ix_n})$$

从R^n得到的环面T^n。这是一个$\hat{A}$在$C(\triangle)$内稠密的例子，虽然$\hat{A}\neq C(\triangle)$。

例3. 再回顾定理2.17的证明，其中包含了这样的结果：$\bar{U}$是$A(U^n)$的极大理想空间。例1最后所用的论据也可以证明，$\bar{U}^n$的自然拓扑与由$A(\bar{U}^n)$导出的Гельфанд拓扑是一样的；例2也是如此。

例4. 前例可作有趣的推广。

设A是交换Banach的代数，它有一组有限多个生成元，记作$x_1,\cdots,x_n$。这意味着$x_i\in A(1\leqslant i\leqslant n)$，并且由$x_1,\cdots,x_n$生成的多项式的全体所构成的集合在$A$内稠密。定义

$$(1)\qquad \phi(h)=(\hat{x}_1(h),\cdots,\hat{x}_n(h))\qquad(h\in\triangle).$$

这时ϕ是$\triangle$到一个紧集$K\subset C^n$上的一个同态。事实上，ϕ是连续的，因为有$\hat{A}\subset C(\triangle)$。如果$\phi(h_1)=\phi(h_2)$，那么对于各个$i$都有$h_1(x_i)=h_2(x_i)$；因而当$x$是由$x_1,\cdots,x_n$生成的多项式时，$h_1(x)=h_2(x)$；又因为这些多项式在$A$内稠密，故$h_1=h_2$。所以$\phi$是一对一的。

现在，我们设法将$\hat{A}$从$\triangle$转换到K，从而使得K能够被看成是A的极大理想空间。为了能确切地叙述，先定义

$$(2)\qquad \psi(x)=\hat{x}\circ\phi^{-1}\qquad(x\in A).$$

这时ψ是A到$C(K)$的一个子代数$\psi(A)$上的一个同态。（如果A是

半单代数，则ϕ为一同构.)．很容易验证

（3） $\phi(x_i)(z)=z_i$，

其中 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in K$.

这是因为，若取$(z_1,\cdots,z_n)=(\hat{x}_1(h),\cdots,\hat{x}_n(h))$，即$z_i=\hat{x}_i(h)$时，将有$\phi^{-1}z=h$。于是$\phi(x_i)(z)=\hat{x}_i(h)=z_i$.

从（3）式可知，对于每个n元多项式P都有

（4） $\phi(P(x_1,\cdots,x_n))=P(z)$ $(z\in K)$

因此，$\phi(A)$的每个元都是K上的多项式的一个一致极限．

例5. 设A为$L^1(\boldsymbol{R}^n)$添加了一个单位元，如同在§1.1.4的例6中曾经提到的那样．A的元素形如$f+\alpha\delta$，其中$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\alpha\in\boldsymbol{C}$，而$\delta$是$\boldsymbol{R}^n$上的Dirac测度．$A$内的乘法是卷积

$$(f+\alpha\delta)*(g+\beta\delta)=(f*g+\beta f+\alpha g)+\alpha\beta\delta.$$

对于各个$t\in\boldsymbol{R}^n$来说，公式

（5） $h_t(f+\alpha\delta)=\hat{f}(t)+\alpha$

定义了A的一个同态，此处的$\hat{f}$是f的Fourier变式．另外

（6） $h_\infty(f+\alpha\delta)=\alpha$

也定义了一个复同态．稍后将概略地证明，再也不需要别的了．这样，作为一个集，$\triangle$就是$\boldsymbol{R}^n\cup\{\infty\}$．对$\triangle$赋予$\boldsymbol{R}^n$的单点紧化的拓扑．既然每个$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$当$|t|\to\infty$时有$\hat{f}(t)\to0$，由（5）和（6）可知$\hat{A}\subset C(\triangle)$．由于$\hat{A}$分离$\triangle$上的点，在$\triangle$上用$\hat{A}$导出的弱拓扑与我们刚才选择的拓扑是一样的．

现在来证明，每个$h\in\triangle$都形如（5）或（6）．如果对于每个$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$都有$h(f)=0$，那么$h=h_\infty$．假定有某个$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$使$h(f)\neq0$；这时将有某个$\beta\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使$h(f)=\int f\beta dm_n$．由于$h(f*g)=h(f)h(g)$，我们能够证明$\beta$与一个连续函数$b$几乎处处重合，$b$满足条件

（7） $b(x+y)=b(x)b(y)$ $(x,y\in\boldsymbol{R}^n)$.

最后，（7）的一切有界解都具有

（8） $b(x)=e^{-ix\cdot t}$ $(x\in\boldsymbol{R}^n)$

的形式，于某个$t\in\boldsymbol{R}^n$．因此$h(f)=\hat{f}(t)$，亦即h形如（5）式．

当$n=1$时，上述概略证明的细节可以从〔14〕的§9.22中找到，至于$n>1$的情况则完全类似。

于是，我们看到了Гельфанд变式是Fourier变式的一种推广，至少在L^1的范围内是这样。

例6. 我们的最后一个例子是$L^\infty(m)$。此处的m是单位区间上的Lebesgue测度，而$L^\infty(m)$是〔0,1〕上的复有界函数的等价类（模为零测度集的剩余类）构成的通常的Benach空间，范数为殆上确界。按照点态乘法，这显然是一个交换Banach代数。

如果$f\in L^\infty(m)$，又G_f是全体使$m(f^{-1}(G))=0$的开集$G\subset \mathbf{C}$组成的并集，那么，容易看出G_f的补集（称为f的本性值域）与f的谱$\sigma(f)$重合，因而也重合于f的Гельфанд变式的$\hat{f}$值域。由此可见，如果f为实数值，$\hat{f}$也是实数值。因而$L^\infty(m)^\wedge$在复共轭之下是封闭的。于是，按照Stone-Weierstrass定理，$L^\infty(m)^\wedge$在$C(\triangle)$内稠密，其中$\triangle$为$L^\infty(m)$的极大理想空间。还可以得出，$f\mapsto\hat{f}$是$L^\infty(m)$到$C(\triangle)$上的一个等距，所以$L^\infty(m)^\wedge$是$C(\triangle)$内的闭集。

接下来看，$\hat{f}\mapsto\int f dm$是$C(\triangle)$上的一个有界线性泛函。根据Riesz表示定理，应当有$\triangle$上的一个正则Borel概率测度$\hat{m}$，满足

$$(9)\qquad \int_\triangle \hat{f}d\hat{m}=\int_0^1 f dm \qquad (f\in L^\infty(m)).$$

如果Ω是$\triangle$内的一个非空开集，Урысон引理蕴涵，存在这样的$\hat{f}\in C(\triangle)$，$\hat{f}\geqslant 0$，它在Ω之外是$\hat{f}=0$；而在某些$p\in\Omega$是$\hat{f}(p)=1$。因此f不是$L^\infty(m)$的零元素，（9）式中的积分取正值。

于是，若Ω为非空开集，则$\hat{m}(\Omega)>0$。

再假设ϕ是$\triangle$上的一个Borel函数，$|\phi|\leqslant 1$。根据Лузин定理（参阅〔14〕的§2.23），有函数列$\hat{f}_n\in C(\triangle)$，$|\hat{f}_n|\leqslant 1$，且依照$L^2(m)$的范数收敛于$\phi$。既然$f\mapsto\hat{f}$保持复共轭，又是一个同态，将（9）式应用于$(f_i-f_j)(\overline{f_i}-\overline{f_j})$，就得到

$$(10)\qquad \int_\triangle |\hat{f}_i-\hat{f}_j|^2 d\hat{m} = \int_0^1 |f_i-f_j|^2 dm.$$

因而$\{f_n\}$是$L^2(m)$内的Cauchy序列，还有，$|f_n|\leqslant 1$ a.e.$[m]$。于是存在$f\in L^\infty(m)$，在$L^2(m)$内有$f_n\to f$；而由（10）式可知$\hat{f}_n\to\hat{f}$在$L^2(\hat{m})$内成立。现在，我们又得到$\phi=\hat{f}$ a.e.$[\hat{m}]$。也就是说：$\triangle$上的每个有界Borel函数ϕ均与某个$\hat{f}\in C(\triangle)$a.e.$[\hat{m}]$相等。

综上所述，$C(\triangle)$与$L^\infty(\hat{m})$是两个恒同的Banach空间。

最后我们指出：$\triangle$是**极不连通的**；这意味着，它的每个开集的闭包仍是开集，因而，彼此不相交的开集其闭包也互不相交。为了证明上述事实，任取开集$\Omega_0\subset\triangle$，记$\overline{\Omega_0}$的补集为Ω_1；设ϕ为Ω_1的特征函数，并且选取$\hat{f}\in C(\triangle)$使$\hat{f}=\phi$ a.e.$[\hat{m}]$。既然在Ω_0内$\phi=0$，而非空开集的测度又必定是正数；那么由$\hat{f}$的连续性可以得知，任何$p\in\Omega_0$均有$\hat{f}(p)=0$。同理，任何$p\in\Omega_1$均有$\hat{f}(p)=1$。至于那些使$\hat{f}$取值既不等于0又不等于1的点，将组成一个开集且测度等于零；这是因为$\hat{f}=\phi$ a.e.$[\hat{m}]$从而该集为空集。置

$$K_i=\{p\in\triangle:\ f(p)=i\},\ i=0,1.$$

这时K_0与K_1是两个不相交的紧集，且$K_0\cup K_1=\triangle$；它们都是开集，又有$\Omega_0\subset K_0$，$\Omega_1\subset K_1$．由此可见$\overline{\Omega_0}=K_0$．所述命题得证。

2.3 对合

2.3.1 定义

对合 复代数（不一定是交换代数）A到A内的一个映射$x\mapsto x^*$称为A上的一个对合，如果对于所有的$x\in A$，$y\in A$以及$\lambda\in C$，这个映射具有以下3个性质：

（1）　$(\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*$；

（2）　$(xy)^*=y^*x^*$；

（3）　$(x^*)^*=x$．

换句话说，对合是一个周期为2的共轭线性反自同构。在对合中，x^*称为x的**伴元**。如果$x^*=x$，则x称为**自伴元**或**Hermite元**。

许多重要的Banach代数都具有对合。例如$f\longmapsto\bar{f}$是$C(K)$上的一个对合。今后我们最关注的一个对合，是将Hilbert空间上的算子映射成为它的伴随算子。

值得注意的是，确实有这样的Banach代数，它不可能具有任何对合。P. Civin与B. Yood曾经给出一个实例。读者可参看Involutions on Banach algebras, Pacific J. Math. 9(1959) 415—436.

C^*-代数 如果Banach代数A有一个对合$x\longmapsto x^*$，并且每个$x\in A$都使

$$\|xx^*\|=\|x\|^2 \tag{4}$$

成立，则Banach代数A特称为C^*-代数。

由条件(4)很容易验证$x\longmapsto x^*$是等距，因而C^*-代数中的对合是连续映射。

注意$\|x\|^2=\|xx^*\|\leqslant\|x\|\,\|x^*\|$意味着$\|x\|\leqslant\|x^*\|$，而利用性质(3)又可以得到$\|x^*\|\leqslant\|(x^*)^*\|=\|x\|$；这样就有

$$\|x^*\|=\|x\|, \tag{5}$$

以及

$$\|xx^*\|=\|x\|\,\|x^*\|. \tag{6}$$

反过来，合并(5)与(6)将能得到(4)。

2.3.2 定理 如果Banach代数A有一个对合$*$，那么，对于任何$x\in A$，以下事实都成立：

(*a*) $x+x^*$，$i(x-x^*)$均为自伴元；

(*b*) xx^*也是自伴元；并由此推知单位元e是自伴元；

(*c*) x能唯一地表示为两个自伴元$u,v\in A$的线性组合$x=u+iv$；

(*d*) x是A的可逆元，当且仅当x^*是A的可逆元；并且$(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$；

(*e*) $\lambda\in\sigma(x)$当且仅当$\bar{\lambda}\in\sigma(x^*)$.

证 (*a*)与(*b*)可以直接验证。

至于(*c*)，只须取

$$u=\frac{1}{2}(x+x^*),\quad v=-\frac{i}{2}(x-x^*).$$

假如另有一种表示

$$x=u'+iv',$$

那么，置$w=v'-v$。注意到w是自伴元，$iw=u-u'$也是自伴元。因此

$$iw=(iw)^*=-iw^*=-iw,$$

亦即$w=0$.这就是说，表示式是唯一的。

(*d*) 可由$(xy)^*=y^*x^*$推知。

(*e*) 将(*d*)应用于$\lambda e-x$即可得到。 □

2.3.3 定理 如果Banach代数A是交换的又是半单的，那么A上的每个对合都连续。

证 设h为A的一个复同态，再定义 $\phi(x)=\bar{h}(x^*)$。由定义2.3.1 中的性质(1)和(2)可知，ϕ也是一个复同态。因此ϕ连续。如果在A内有$x_n\to x$以及$x_n^*\to y$，将得出

$$\bar{h}(x^*)=\phi(x)=\lim\phi(x_n)=\lim\bar{h}(x_n^*)=\bar{h}(y).$$

既然A是半单代数，那么$y=x^*$。再由闭图象定理即可得知对合$x\mapsto x^*$连续。 □

下述有关C^*-代数的定理，将是第3章用来求证某些谱定理的关键。

2.3.4 定理 (Гельфанд-Наймарк) 设A是一个交换C^*-代数，它的极大理想空间为$\triangle$。这时有以下事实：

(*a*) Гельфанд变式是A到$C(\triangle)$上的一个等距同构，并且

(1) $$(x^*)^\wedge=\bar{\hat{x}}\qquad(x\in A);$$

此式也可以写成

(2) $$h(x^*)=\overline{h(x)}\qquad(x\in A,\ h\in\triangle).$$

(*b*) 特别是，x为自伴元，当且仅当$\hat{x}$是一个实函数。

(1)式可以解释为，Гельфанд变式将A上给定的对合转换

成$C(\triangle)$上的自然对合，即共轭。以这种方式保持对合的同构通常称为*-同构。

证 我们先求证(*b*)。

任取自伴元$x\in A$，以及任意的$h\in\triangle$．置$z=x+ite$，t是实数．如果$h(x)=\alpha+i\beta$，其中α，β均为实数，那么

$$h(z)=\alpha+i(\beta+t),$$

$$zz^*=\alpha^2+t^2e.$$

因而有

$$\alpha^2+(\beta+t)^2=|h(z)|^2\leqslant\|z\|^2=\|zz^*\|\leqslant\|x\|^2+t^2,$$

或

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2+2\beta t\leqslant\|x\|^2\qquad(-\infty<t<\infty).$$

由(3)式看出必须$\beta=0$，所以$h(x)$是实数。

反之，如果对于任意元$x\in A$，以及任意的$h\in\triangle$，已知$h(x)$为实数；那么，记$x=x_1+ix_2$，其中x_1，x_2均为自伴元，将由$h(x)=h(x_1)+ih(x_2)$得到$h(x_2)=0$. 考虑到h的任意性，必须$x_2=0$。因此$x=x_1$，也就是说，x是自伴元。

(*b*) 任取$x\in A$，并表示为$x=x_1+ix_2$，其中$x_1=x_1^*$，$x_2=x_2^*$．由于$x^*=x_1-ix_2$，根据已证的(*b*)，$\hat{x}_1$与$\hat{x}_2$都是实函数，因此(1)式得证。

现在已能看出，在复共轭之下$\hat{A}$是封闭的。

如果$x\in A$，记$y=xx^*$，那么$y=y^*$．因此$\|y^2\|=\|y\|^2$．取$m=2^n$，对n施行归纳法，能够得到

$$\|y^m\|=\|y\|^m.$$

再应用谱半径公式和定理2.2.3的(*c*)，就有$\|\hat{y}\|_\infty=\|y\|$．因为$y=xx^*$，所以由（1）式可得$\hat{y}=|\hat{x}|^2$．从而有

$$\|\hat{x}\|_\infty^2=\|\hat{y}\|_\infty=\|y\|=\|xx^*\|=\|x\|^2,$$

即$\|\hat{x}\|_\infty=\|x\|$．这就证明了映射$x\mapsto\hat{x}$是一个等距。

因而又有$\hat{A}$在$C(\triangle)$内闭。

最后，应用 Stone-Weierstrass 定理就得出结论$\hat{A}=C(\triangle)$。 □

下面的定理其实是定理 2.3.4 的一个特款．在叙述中含蓄地表达了 Гдельфан 变式之逆的意思，其目的在于能与符号运算相联系。

2.3.5 定理 如果A是交换C^*-代数，它含有这样一个元x，由x与x^*作成的多项式在A内稠密；那么，公式

(1) $(\psi f)\hat{} = f\circ\hat{x}$

定义了$C(\sigma(x))$到A上的一个等距同构ψ，它对于每个$f\in C(\sigma(x))$都有

(2) $\psi\bar{f} = (\psi f)^*$.

此外，如果在$\sigma(x)$上$f(\lambda)=\lambda$，则将有$\psi f = x$。

证 设$\triangle$为A的极大理想空间。这时$\hat{x}$是$\triangle$的连续函数，其值域为$\sigma(x)$。假设$h_1, h_2\in\triangle$并且$\hat{x}(h_1)=\hat{x}(h_2)$，亦即$h_1(x)=h_2(x)$，那么，由定理2.3.4的(2)式可得$h_1(x^*)=h_2(x^*)$。如果$P$是任一由$x$与$x^*$作成的多项式，则进一步将有

$$h_1(P(x, x^*)) = h_2(P(x, x^*)).$$

根据题设，形如$P(x, x^*)$的元素在A内稠密。于是h_1与h_2的连续性将保证，对任何$y\in A$都有$h_1(y)=h_2(y)$。因此$h_1=h_2$。这样，我们就证明了$\hat{x}$是一对一的。既然$\triangle$是紧集，那么，还可以推知$\hat{x}$是$\triangle$到$\sigma(x)$上的一个同胚．

所以，映射$f\mapsto f\circ\hat{x}$是$C(\sigma(x))$到$C(\triangle)$上的一个等距同构，它还保持复共轭．

由于 $\hat{A}=C(\triangle)$，因此各个$f\circ\hat{x}$ 都是A中唯一确定的元素的Гельфан变式，我们记作ψf，它满足条件$\|\psi f\| = \|f\|_\infty$。

利用定理 2.3.4的（1）式，将有 $(\psi f)^*\hat{} = (\psi f)\hat{}^-$；另一方面，又有$(\psi\bar{f})\hat{} = \bar{f}\circ\hat{x} = (\bar{f}\circ\hat{x})^- = (\psi f)\hat{}^-$，于是（2）式得证。

如果$f(\lambda)=\lambda$，那么$f\circ\hat{x}=\hat{x}$，这时由（1）式可得$\psi f = x$.

□

读者从定理2.3.5当能理解，将A中其Гельфанд变式为$f\circ\hat{x}$的元记作 $f(x)$ 是说得过去的，今后要经常用到这种写法．就某

些特殊的代数而言，它将符号运算推广到定义在 x 的谱上的任意的连续函数，不管这些函数是否为全纯的。

平方根的存在与否，常常是人们颇感兴趣的问题。这一节最后的定理给出了一个简单的条件，它能保证在具有对合的Banach代数中，每个自伴元都有平方根，并且这个平方根也是一个自伴元。

2.3.6 定理 如果交换 Banach 代数A有一个对合，$x \in A$，$x=x^*$；并且$\sigma(x)$不含有实数$\lambda \leqslant 0$；那么，存在$y \in A$使得 $y=y^*$，$y^2=x$。

请读者注意，题设并未要求对合是连续的；将来（定理2.4.6）还会看到，交换性也可以从题设中省略。

证 设 Ω 为全体非正实数的集在 $\boldsymbol{C}$ 内的余集。存在这样的 $f \in H(\Omega)$，它满足条件$[f(\lambda)]^2=\lambda$，并且，$f(1)=1$。由于$\sigma(x) \subset \Omega$，我们可以按照定义1.5.3的（2）式确定$y \in A$为

$$(1) \qquad y=\tilde{f}(x)$$

根据定理1.5.4，应当有$y^2=x$。以下只须求证$y^*=y$。

因为Ω是单连通的，所以由解析函数论中的 Runge 定理可知，有多项式序列$\{P_n\}$在Ω的紧子集上一致收敛于f。定义

$$(2) \qquad Q_n(\lambda)=\frac{1}{2}\{P_n(\lambda)+\overline{P_n(\bar{\lambda})}\}.$$

注意到$f(\bar{\lambda})=\overline{f(\lambda)}$，就能看出多项式序列$\{Q_n\}$也收敛于$f$。由（2）知多项式$Q_n$的系数均为实数。记

$$(3) \qquad y_n=Q_n(x) \qquad (n=1,2,\cdots).$$

既然$x=x^*$，那么也有$y_n=y_n^*$。根据定义1.5.3，还可以得到

$$(4) \qquad y=\lim_{n\to\infty} y_n,$$

这是因为$Q_n(\lambda)\to f(\lambda)$时有$Q_n(x)\to\tilde{f}(x)$。如果事先已假定对合是连续的，则自伴元的集将是闭集，并且能够从（4）直接推知$y^*=y$。

设R为A的根。再设π：$A\to A/R$是商映射。在A/R内定义一个对合

(5) $\qquad [\pi(a)]^* = \pi(a^*) \qquad (a \in A)$.

如果$a \in A$是自伴元，则$\pi(a)$也是自伴元. 在§2.1.3曾经指出商映射是连续的，所以$\pi(y_n) \to \pi(y)$. 由于A/R同构于$\hat{A}$，从定理2.2.3可知A/R是半单代数；再应用定理2.3.3就得到A/R内每个对合都是连续的，由此可知$\pi(y)$是自伴元. 因而$\pi(y) = \pi(y^*)$.

这样，我们就知道了$y - y^*$应当在A的根内.

按照定理2.3.2的(c)，记$y = u + iv$，其中$u = u^*$, $v = v^*$. 如果我们能够证明$v = 0$，那么y就是自伴元. 现在，$x = y^2$又可以写成

(6) $\qquad x = u^2 - v^2 + 2iuv$.

设h为A的任一复同态，由于$y - y^* = 2iv \in R$，故$v \in R$，即$h(v) = 0$。因而$h(x) = [h(u)]^2$ 题设$0 \bar{\in} \sigma(x)$，即$h(x) \neq 0$，于是$h(u) \neq 0$。由定理2.1.5的(c)可知，u是A内的可逆元. 既然$x = x^*$，那么(6)式蕴涵$uv = 0$；再写出$v = u^{-1}(uv)$就得到$v = 0$. □

推论 对于定理2.3.6中的x和y来说，如果$\sigma(x) \subset (0, \infty)$，那么也有$\sigma(y) \subset (0, \infty)$.

证 由定义$y = \tilde{f}(x)$与谱映射定理即得. □

2.4 非交换代数中的交换子代数的应用

非交换代数并不排斥有交换的子代数. 因此，交换代数的研究成果有可能应用于非交换代数，至少是能够应用于其中的一部分，即其交换子代数上，就所考虑的问题而言，如果还能判定在交换子代数上得到的结果与在整个(非交换)代数上的结果相同，那么，在这个问题中，代数的交换性将不影响结论. 以谱论为例，我们的注意力往往集中于一个元$x \in A$，以及由x生成的A的(闭)子代数B，而B是交换代数. 许多工作都是在B的范围内进行. 预计会遇到的困难是，x将要有关于A的谱$\sigma_A(x)$与关于B的谱$\sigma_B(x)$，这两个谱是否相同？定理2.4.3给出了一个简单的回答. 另一种方法见于定理2.4.5，它适用于A有一个对合的情况.

2.4.1 中心化子

定义 如果S是 Banach 代数A的一个子集，则S的**中心化子** $\Gamma(S)$是A的另一个子集：

$\Gamma(S)=\{x\in A$：每个$s\in S$都有$xs=sx\}$.

如果中心化子 $\Gamma(S)$ 的任意两个元素彼此交换，就说 $\Gamma(S)$ 交换。

2.4.2 定理 Banach 代数A的任一子集 S的中心化子 $\Gamma(S)$ 有下列性质：

(a) 单位元$e\in\Gamma(S)$；

(b) $\Gamma(S)$是A的一个闭子代数；

(c) $S\subset\Gamma(\Gamma(S))$；

(d) 如果$\Gamma(S)\subset S$，那么$\Gamma(S)$交换；

(e) 如果S交换，那么$\Gamma(\Gamma(S))$交换。

证 (a)显见。

(b) 如果x和y与每个$s\in S$交换，那么 λx, $x+y$ 和xy也将如此；又因为乘法在A内连续，故$\Gamma(S)$ 是闭集。因此$\Gamma(S)$ 是A的一个闭子代数。

(c) 任取$s\in S$，对于每个 $y\in\Gamma(S)$，都有 $sy=ys$；这时也就有$s\in\Gamma(\Gamma(S))$.

(d) 任取 x, $y\in\Gamma(S)$，题设 x, $y\in S$. 我们只看$x\in\Gamma(S)$，$y\in S$；按照$\Gamma(S)$的定义就有$xy=yx$.

(e) 如果S交换，必定$S\subset\Gamma(S)$. 这时，凡是能与每个$x\in\Gamma(S)$交换的，也将能与每个$s\in S$交换，所以$\Gamma(S)\supset\Gamma(\Gamma(S))$. 由($d$)可知$\Gamma(\Gamma(S))$交换。 □

2.4.3 定理 如果 Banach 代数A有一个交换子集S，记$\Gamma(\Gamma(S))=B$；那么，对于每个$x\in B$都有$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$.

证 显然，只须证明$\sigma_B(x)\subset\sigma_A(x)$.

任取$x\in B$。设$\lambda\overline{\in}\sigma_A(x)$，这时有 $(x-\lambda e)^{-1}\in A$. 注意到$x-\lambda e\in B$以及中心化子的定义，对于每个$y\in\Gamma(S)$来说，$(x-\lambda e)y=y(x-\lambda e)$成立。因此在$A$内将有$y=(x-\lambda e)^{-1}y(x-\lambda e)$ 或 $y(x-\lambda e)^{-1}=(x-\lambda e)^{-1}y$。而最后一个等式表明$(x-\lambda e)^{-1}\in\Gamma(\Gamma(S))$

$=B$，即 $\lambda \in \sigma_B(x)$． □

推论1 如果 Banach 代数 A 有二个元 x, y 满足条件 $xy=yx$，那么，谱将有下列包含关系：

$$\sigma(x+y)\subset\sigma(x)+\sigma(y)$$

$$\sigma(xy)\subset\sigma(x)\sigma(y)$$

证 置 $S=\{x, y\}, B=\Gamma(\Gamma(S))$，这时有 $x+y\in B, xy\in B$．由定理2.4.3可知，只须证明

$$\sigma_B(x+y)\subset\sigma_B(x)+\sigma_B(y),$$

$$\sigma_B(xy)\subset\sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

由于B交换，因此，对于每个$z\in B$来说，$\sigma_B(z)$是 Гельфанд 变式$\hat{z}$的值域（Гельфанд 变式现在看成是B的极大理想空间上的函数），从而，由等式

$$(x+y)\,\hat{}=\hat{x}+\hat{y};\quad (xy)\,\hat{}=\hat{x}\hat{y}$$

就能得到预期的结论． □

推论2 对于换位子C_x来说，恒有

$$\sigma(C_x)\subset\sigma(x)-\sigma(x).$$

证 将推论 1 应用于代数 $\mathscr{B}(A)$ 的交换元 R_x 与 $-L_x$，由于 $C_x=R_x-L_x$，故有

$$\sigma(C_x)\subset\sigma(R_x)-\sigma(L_x).$$

但在 § 1.6.4已知

$$\sigma(L_x)=\sigma(x)=\sigma(R_x),$$

所以能够得到

$$\sigma(C_x)\subset\sigma(x)-\sigma(x).$$ □

2.4.4 定义 设代数A有一个对合 *，这时

（i）如果某个$x\in A$满足条件$xx^*=x^*x$，则称x为A的一个**正规元**；

(ii) 如果子集$S\subset A$交换，并且$x\in S$时必有 $x^*\in S$，则称S为A的一个**正规子集**．

2.4.5 定理 如果Banach代数A有一个对合*，B是A的一个正规子集，并且作为正规子集来说是最大的，那么

(*a*) B是A的一个交换闭子代数；

(*b*) 对于每个$x\in B$，都有$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$。

请读者注意，这个定理的题设也没有假定对合连续，然而仍能证明B是闭的。

证 容易看出，如果$x\in A$具备以下两个性质

(i) $xx^*=x^*x$；

(ii) 对于每个$y\in B$都有$xy=yx$，

就将得出$x\in B$.

这是因为，当$x\in A$满足这些条件时，由于B是正规子集，对于任何$y\in B$，都有$xy^*=y^*x$因而又有$x^*y=yx^*$. 这样，$B\cup\{x, x^*\}$也是正规子集，既然B是最大的正规子集，那么必定$x\in B$。

显然，一切$x\in B$必具备上述性质(i)，(ii). 并且由此可知，B的元素的和与积仍在B内，因此B是一个交换代数。

设$\{x_n\}\subset B$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。因为对于所有的$y\in B$，$x_ny=yx_n$都成立，而乘法又是连续的，所以能够得到$xy=yx$；再推导出

$$x^*y=(y^*x)^*=(xy^*)^*=yx^*,$$

将其中的y换成x_n就得到$x^*x_n=x_nx^*$，取极限后即为$x^*x=xx^*$. 这就是说，序列$\{x_n\}\subset B$的极限元$x\in B$. 因此B是闭集. (*a*) 证讫.

(*b*) 只须证$\sigma_B(x)\subset\sigma_A(x)$，方法与定理2.4.3中所用的相同，叙述稍有改变。

任取$x\in B$, 显然$e\in B$,因而由任何复数λ作成的$x-\lambda e=z\in B$。如果有$z^{-1}\in A$，注意到z是正规元时z^{-1}也应是正规元；又因为z可以与每个$y\in B$交换，所以z^{-1}也将如此，那么就得到$z^{-1}\in B$。

2.4.6 定理 "交换性"可以从定理2.3.6的题设条件中删去.

证 根据Hausdorff 极大性原理，给定的自伴元（因而也是正规元）$x\in A$应当含于某个极大正规子集B中，按照定理2.4.5，我们用到定理2.3.6时，可以将其中A的换成它的交换子集B，这样，就不必要求整个A是交换代数。 □

这个定理可以说是定理 2.4.5 的一个应用. 其第二个应用则是要对任意（不一定是交换的）C^*-代数给出定理2.3.4(Гельф-

анд–Наймарк)的一些推论。为了行文方便，先明确以下的

定义 在一个有对合的Banach代数中，陈述“$x\geqslant 0$”意味着$x=x^*$以及$\sigma(x)\subset[0,\infty)$.

2.4.7 定理 对于任何C^*-代数A来说，以下结论均能成立：

(*a*) 自伴元$x\in A$有实数谱；

(*b*) 正规元$x\in A$的谱半径$\rho(x)=\|x\|$；

(*c*) 任何$y\in A$都有$\rho(yy^*)=\|y\|^2$；

(*d*) 如果$u, v\in A$还有$u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, 那么也有$u+v\geqslant 0$；

(*e*) 任何$y\in A$都有$yy^*\geqslant 0$；

(*f*) 任何$y\in A$都能使$e+yy^*$成为A的可逆元。

证 (*a*) 我们已经知道，每个正规元$x\in A$都含于一个极大正规子集$B\subset A$中。根据Гельфнд–Наймарк定理和定理2.4.5, B作为一个交换C^*-代数，它等距同构于$\hat{B}=C(\triangle)$，这里的$\triangle$是B的极大理想空间；另外还有

$$(1)\qquad \sigma(z)=\hat{z}(\triangle)\qquad (z\in B),$$

其中$\sigma(z)$是关于A的谱，$\hat{z}(\triangle)$是将z看作B的一个元时，它的Гельфанд变式的值域。

特别是，如果x是自伴元，Гельфанд–Наймарк定理已经指出，这时的$\hat{x}$是$\triangle$上的一个实值函数，因此（1）蕴涵(*a*).

(*b*) 对于任何正规元x来说，（1）又蕴涵$\rho(x)=\|\hat{x}\|_\infty$，由于$B$与$\hat{B}$等距，还应当有$\|\hat{x}\|_\infty=\|x\|$. 因而$\rho(x)=\|x\|$.

(*c*) 任取$y\in A$, 因为yy^*总是自伴元，所以由(*b*)可得

$$\rho(yy^*)=\|yy^*\|=\|y\|^2.$$

(*d*) 设$u, v\in A$且$u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$.

置$\alpha=\|u\|$, $\beta=\|v\|$, $w=u+v$, $\gamma=\alpha+\beta$. 这时有$\sigma(u)\subset[0,\alpha]$. 并可推算出

$$(2)\qquad \sigma(\alpha e-u)\subset[0,\alpha].$$

再应用(*b*)，又将得到$\|\alpha e-u\|\leqslant\alpha$. 经过同样的讨论，可得$\|\beta e-v\|\leqslant\beta$. 这两个结果合并起来，即为

$$(3)\qquad \|\nu e-w\|\leqslant\nu.$$

由于$w=w^*$，根据结论(a)，$\sigma(\nu e-w)$ 应当是实数集，因此，可以从(3)式得到

(4) $$\sigma(\nu e-w)\subset[-\nu,\ \nu].$$

然后推算出$\sigma(w)\subset[0,2\nu]$，也就有$w\geqslant 0$.

(e) 置$x=yy^*$. x是自伴元．如果B是我们求证 (a) 时提到的那个交换C^*-代数，那么，$\hat{x}$是△上的一个实值函数．按照(1)式，下面只须证明在△上的$\hat{x}\geqslant 0$.

由于$\hat{B}=C(\triangle)$，因而存在$z\in B$使得在△上

(5) $$\hat{z}=|\hat{x}|-\hat{x}.$$

根据Гельфанд-Наймарк定理，$\hat{z}$应当是实数，因而$z=z^*$.

再置

(6) $$zy=w=u+iv,$$

其中u, v均为A内的自伴元，这时

(7) $$ww^*=zyy^*z^*=zxz=z^2x,$$

因而又有

(8) $$\begin{aligned} w^*w&=2u^2+2v^2-ww^* \\ &=2u^2+2v^2-z^2x. \end{aligned}$$

由于$u=u^*$，按照结论(a)，$\sigma(u)$应当是实数集．从而由谱映射定理可得$u^2\geqslant 0$.类似地，也有$v^2\geqslant 0$.由(5)式还能算出在△上$\hat{z}^2\hat{x}\leqslant 0$。既然 $z^2x\in B$，那么，按照（1）式，又有 $-z^2x\geqslant 0$。现在，只要将结论(d)应用于（8）式，就得到$w^*w\geqslant 0$.

但是，在第1章习题2已经指出

$$\sigma(ww^*)\subset\sigma(w^*w)\cup\{0\}.$$

因此$ww^*\geqslant 0$。由(7)式可以看出，这意味着在△上$\hat{z}^2\hat{x}\geqslant 0$. 根据(5)式，这个不等式仅当$\hat{x}=|\hat{x}|$时成立。也就是$\hat{x}\geqslant 0$.

(f) 是(e)的一个推论，因为它说的是$-1\overline{\in}\sigma(yy^*)$.

□

由定理2.4.7的(e) 容易看出，对于C^*-代数来说，只需要很少的条件，就能使得在一个闭子代数上的谱与整个代数上的谱相等。这就是下面的定理。

2.4.8 定理 如果C^*-代数A的一个闭子代数B满足以下两个条件

(i) $e\in B$;

(ii) 每个$x\in B$都有$x^*\in B$,

那么，任何$x\in B$都有$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$.

证 有了求证定理2.4.5的(b)的经验，我们知道，只须取$y\in B$，假设y在A内有可逆元，然后设法证明$y^{-1}\in B$.

由于y在A内可逆，故y^*与yy^*在A内也都可逆，应用定理2.4.7的(e)，将有$\sigma_A(yy^*)\subset(0,\infty)$. 这样，$\sigma_A(yy^*)$在$\mathbf{C}$内的余集是连通集，根据定理1.4.8的推论，就能得出$\sigma_B(yy^*)=\sigma_A(yy^*)$. 因而$(yy^*)^{-1}\in B$. 于是很容易得到$y^{-1}=y^*(yy^*)^{-1}\in B$.

□

2.5 正泛函

2.5.1 定义

实泛函 设 Banach 代数A有一个对合*，则A上的复值线性泛函$f(x)$将称为实泛函，如果对于任何$x\in A$都有

$$f(x^*)=\overline{f(x)},$$

其中x^*是x的伴元.

显然，实泛函对于自伴元取实数值.

正泛函 设 Banach 代数A有一个对合*，则A上的复值线性泛函$f(x)$将称为正泛函，如果对于任何$x\in A$都有

$$f(xx^*)\geqslant 0.$$

2.5.2 定理 设 Banach 代数A有一个对合*，则定义在A上的每个正泛函f都具下述性质：

(a) $f(x^*)=\overline{f(x)}$，换句话说，正泛函必定是实泛函；

(b) $|f(xy^*)|^2\leqslant f(xx^*)f(yy^*)$ (Schwarz不等式)；

(c) $|f(x)|^2\leqslant f(e)f(xx^*)\leqslant f(e)^2\rho(xx^*)$;

(d) 对于任何正规元$x\in A$，都有$|f(x)|\leqslant f(e)\rho(x)$.

证 (a)任取一自伴元$h\in A$，置$z=e+h$，则有

$$f(zz^*)=f((e+h)(e+h)^*)=f(e)+2f(h)+f(h^2).$$

题设f是正泛函，所以 $f(zz^*)\geqslant 0$，$f(e)=f(ee^*)\geqslant 0$，$f(h^2)=f(hh^*)\geqslant 0$；从而$f(h)$应当是实数。

既然任何$x\in A$均可表示为$x=h_1+ih_2$，其中h_1，h_2都是A内的自伴元；那么，由$x^*=h_1-ih_2$立即得出

$$f(x^*)=f(h_1)-if(h_2)=\overline{f(x)}.$$

(b) $f(xy^*)=0$ 时不等式必然成立，以下设$f(xy^*)\neq 0$.

任取实数α，记$\beta=f(xy^*)$；利用(a)的结果，应有$\bar{\beta}=\overline{f(xy^*)}=f(yx^*)$。将$f((\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta y)^*)\geqslant 0$展开，得

$$\alpha^2 f(xx^*)+\alpha\bar{\beta}f(xy^*)+\alpha\beta f(yx^*)+\beta\bar{\beta}f(yy^*)\geqslant 0,$$

也可以写成

$$\alpha^2 f(xx^*)+2\alpha|f(xy^*)|^2+|f(xy^*|^2 f(yy^*)\geqslant 0.$$

由于上式对任意实数α都能成立，因而必定是

$$|f(xy^*)|^2\leqslant f(xx^*)f(yy^*).$$

(c) 第一个不等式其实是Schwarz不等式中$y=e$时的特款，我们来求证第二个。

任取$\varepsilon>0$，$\sigma(\rho((xx^*)+\varepsilon)e-xx^*)$将位于开的右半平面内，根据定理2.3.6，存在自伴元$u\in A$使得$u^2=(\rho(xx^*)+\varepsilon)e-xx^*$，这时由

$$f(u^2)=f((\rho(xx^*)+\varepsilon)e-xx^*)\geqslant 0,$$

可以得到

$$f(xx^*)\leqslant(\rho(xx^*)+\varepsilon)f(e).$$

因为ε是任意正数，所以

$$f(xx^*)\leqslant f(e)\rho(xx^*).$$

将此式代入第一个不等式，(c)即证讫。

(d) 如果$x\in A$是正规元，那么$xx^*=x^*x$，根据定理2.4.3的推论1，应有$\sigma(xx^*)\subset\sigma(x)\sigma(x^*)$. 因此

$$\rho(xx)\leqslant\rho(x)\rho(x^*)=\rho(x)^2$$

成立，将此式代入(c)的不等式，就得到

$$|f(x)|\leqslant f(e)\rho(x).$$ □

2.5.3 定理 设Banch代数A有一个对合*，则定义在A上的每个正泛函f都是有界泛函。特别是，如果A是交换代数，则有$\|f\|=f(e)$；如果对合满足条件$\|x^*\|\leqslant\beta\|x\|$，则有$\|f\|\leqslant\beta^{1/2}f(e)$.

证 我们先证两个特款。

当A是交换代数时，定理2.5.2的(d)对任何$x\in A$均能成立，因而有$|f(x)|\leqslant f(e)\|x\|$；由此得出$\|f\|\leqslant f(e)$. 因为$\|e\|=1$，由定义 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|$ 又可得 $\|f\|\geqslant f(e)$，所以$\|f\|=f(e)$.

如果$\|x^*\|\leqslant\beta\|x\|$，由$\rho(xx^*)\leqslant\|x\|\,\|x^*\|$可以看出定理2.5.2的蕴涵$(c)$ $|f(x)|\leqslant f(e)\beta^{1/2}\|x\|$，因而$\|f\|\leqslant\beta^{1/2}f(e)$.

现在来考虑一般情况。

首先做一点说明，前已指出$f(e)\geqslant0$。但是，如果$f(e)=0$，那么由定理2.5.2的(c)可知，对于任何$x\in A$都有$f(x)=0$，这时$\|f\|=0$。因此，在证明过程中无妨设$f(e)>0$，并且指定$f(e)=1$.

设A内全体自伴元组成的集为H，其闭包记作$\bar{H}$. 显然，H与iH都是实向量空间，并且由定理2.3.2可知$A=H+iH$，根据定理2.5.2.的(a)，将f限制在H上时得到的是范数等于1的实值线性泛函，因而可以扩张为$\bar{H}$上的实值线性泛函F使其范数仍等于1。我们能够确定

$$(1)\qquad F(y)=0\qquad (y\in\bar{H}\cap i\bar{H}).$$

为此，设$y=\lim u_n=\lim(iv_n)$，其中$u_n\in H$，$v_n\in H$；这时$u_n^2\to y^2$，$v_n^2\to -y^2$；定理2.5.2的(c)和(d)蕴涵

$$(2)\qquad |f(u_n)|^2\leqslant f(u_n^2)\leqslant f(u_n^2+v_n^2)\leqslant\|u_n^2+v_n^2\|\to0.$$

由于$F(y)=\lim f(u_n)$，因此(1)式得证。

由Banach空间的性质（参阅[15]的§5.20），存在一个常数$\gamma<\infty$，使得任何$x\in A$都能表示为

(3) $x=x_1+ix_2$, $x_1\in\tilde{H}$, $x_2\in\tilde{H}$, $\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant\gamma\|x\|$.
如果$x=u+iv$, 其中$u\in H$, $v\in H$; 那么x_1-u与x_2-v都含在$\tilde{H}\cap i\tilde{H}$内，这时，应用(1)式就有

(4) $$f(u)=F(x_1),\quad f(v)=F(x_2);$$

从而得到

(5) $$f(x)=f(u)+if(v)=F(x_1)+iF(x_2).$$

做一点简单的推算，就有

(6) $$|f(x)|\leqslant|F(x_1)|+|F(x_2)|$$
$$\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant\gamma\|x\|.$$ □

值得注意的是，如果赋范代数不完备，定理 2.5.3 将不能成立。关肇直-田方增的《赋范环论》第三章 § 5 介绍了一个反例。本章习题12也有这方面的信息。

下一个定理将提供正泛函的例子，并指出它们与正测度之间的关系，它容纳了Bochner 有关正定函数的经典的定理作为一个特款。

2.5.4 定理 设A是交换Banach代数，它的极大理想空间为$\triangle$；它有一个对合*，并且按照下述意义是对称的：

(1) $$h(x^*)=\overline{h(x)}\qquad(x\in A,\ h\in\triangle).$$

记A上的正泛函为f, $\triangle$上的正则Borel测度为μ，置

$$K=\{f:f(e)\leqslant1\},$$
$$M=\{\mu:\mu(\triangle)\leqslant1\}.$$

那么，公式

(2) $$f(x)=\int_\triangle\hat{x}d\mu\qquad(x\in A)$$

确立了凸集K与M之间的一个一一对应，并将极值点变换成极值点。

因而，A上的积性线性泛函恰好是K的极值点。

证 如果$\mu\in M$, f是(2)式所定义的，那么，f显然是线性的；而且(1)式蕴涵$(xx^*)^\wedge=|\hat{x}|^2$,故$f(xx^*)=\int_\triangle|\hat{x}|^2d\mu\geqslant 0$. 又因为$f(e)=\mu(\triangle)$，所以$f\in K$.

如果$f\in K$，那么，按照定理2.5.2的(d)，f在A的根上的值为0。因而，在$\hat{A}$上有一个泛函$\hat{f}$，对于一切$x\in A$都有$\hat{f}(\hat{x})=f(x)$。这时

$$(3)\quad |\hat{f}(\hat{x})|=|f(x)|\leqslant f(e)\rho(x)=f(e)\|x\|_{\infty}\qquad (x\in A).$$

由此可见，$\hat{f}$是$C(\triangle)$的子空间$\hat{A}$上的一个线性泛函，其范数为$f(e)$。将这个泛函扩张到$C(\triangle)$上，保持原来的范数。于是Riesz表示定理将给出一个正则Borel测度μ，其$\|\mu\|=f(e)$，并且满足(2)式。由于

$$(4)\qquad \mu(\triangle)=\int_{\triangle}\hat{e}d\mu=f(e)=\|\mu\|,$$

故 $\mu\geqslant 0$。因而$\mu\in M$.

由于题设的（1）式，$\hat{A}$满足 Stone-Weierstrass 定理的条件，因而$\hat{A}$在$C(\triangle)$内稠密。这蕴涵μ是由f唯一确定的。

显然0是M的一个极值点，其它的极值点则是单位质量所集中的点$h\in\triangle$。既然A的每个复同态都取$x\mapsto\hat{x}(h)$的形式，$h\in\triangle$；那么定理已经得证。 □

本节的最后一个定理表明，K的极值点是积性线性泛函，即使对合并不满足（1）式。

2.5.5 定理 设A是交换Banach 代数，它有一个对合*；再设K为A上的正泛函当中满足条件$f(e)\leqslant 1$的全体f构成的集。这时，若$f\in K$，则下列三个性质当中的每一个都蕴涵其余两个：

(a) 对于任何$x, y\in A$，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$；

(b) 对于任何$x\in A$，都有$f(xx^*)=f(x)f(x^*)$；

(c) f是K的一个极值点。

证 显然(a)蕴涵(b)。

设(b)成立。取$x=e$，将有 $f(e)=f(e)^2$。因此 $f(e)=0$ 或 $f(e)=1$。若$f(e)=0$，则由定理2.5.2的(c)可知$f=0$，这时f是K的一个极值点。再考虑$f(e)=1$的情况。设$2f=f_1+f_2$（$f_1, f_2\in K$），我们来求证$f=f_1$。显然 $f_1(e)=1=f(e)$。如有$x\in A$使$f(x)=0$，则由定理2.2.5的(c)得到

（1） $|f_1(x)|^2 \leqslant f_1(xx^*) \leqslant 2f(xx^*) = 2f(x)f(x^*) = 0.$

这就是说，f_1与f在f的零空间以及e上是重合的。因此 $f_1 = f$。同理$f_2 = f$。于是证得(b)蕴涵(c)。

最后证明(c)蕴涵(a)。

设f是K的一个极值点。若$f(e)=0$，则$f=0$；这个f当然是积性的。剩下的是$f(e)=1$的情况。我们先求证(a)的一个特款：

（2） $f(xx^*y) = f(xx^*)f(y) \qquad (x \in A,\ y \in A).$

选取适当的x使$\|xx^*\|<1$。根据定理2.3.6，有这样的$z \in A$存在，$z=z^*$ 且 $z^2 = e - xx^*$。定义

（3） $F(y) = f(xx^*y) \qquad (y \in A).$

于是，有

（4） $F(yy^*) = f(xx^*yy^*) = f[(xy)(xy^*)] \geqslant 0;$

以及

（5） $(f-F)(yy^*) = f[(e-xx^*)yy^*] = f(z^2yy^*)$
$= f[(yz)(yz)^*] \geqslant 0.$

既然

（6） $0 \leqslant F(e) = f(xx^*) \leqslant f(e)\|xx^*\| < 1,$

那么（4）与（5）表明F与$f-F$都属于K。如果$F(e)=0$，则$F=0$。如果，$F(e)>0$，则由(6)式可以看出

（7） $$f = F(e) \cdot \frac{F}{F(e)} + (f-F)(e) \cdot \frac{f-F}{f(e)-F(e)}$$

是K的元素的一个**凸组合**。因为f是极值点，所以总是能够得到

（8） $F = F(e) \cdot f$

然后从（8）和（3）就可以推导出（2）式。

至于由（2）向(a)的过渡，只须借助下列恒等式当中的任何一个即可实现：

（9） $$x = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \omega^p z_p z_p^*,$$

其中 $n=3,4,5,\cdots$；$\omega = \exp(2\pi i/n)$；$x \in A$且$z_p = e + \omega^{-p}x$；*是A内的对合。

恒等式(9)可以直接验证，注意利用众所周知的事实

$$(10)\qquad \sum_{p=1}^{n} \omega^{p} = \sum_{p=1}^{n} \omega^{2p} = 0. \qquad \square$$

习 题

1．设X是紧Hausdorff空间，试找出X的闭子集与$C(X)$的闭理想之间的一个自然的一一对应。

2．记单位圆盘U的闭包为$\bar{U}$。设 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|<\infty$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，对每个$z\in\bar{U}$，有$|f(z)|>0$；又$1/f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，试证$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$。

3．试证在多圆柱代数$A(U^n)$中的多项式是稠密的。

提示：如果$f\in A(U^n)$，$0<r<1$，f_r定义为$f_r(z)=f(rz)$，那么，f_r是$\bar{U}^n$上的一个绝对收敛（因而一致收敛）的多重幂级数之和。

4．设A是交换Banach代数，$x\in A$，f是在某个包含了$\hat{x}$的值域的开集$\Omega\subset \mathbf{C}$内的全纯函数。证明存在$y\in A$使$\hat{y}=f\circ\hat{x}$，亦即，对于A的每个复同态h都有$h(y)=f(h(x))$。

再证：如果A是半单代数，那么y由x与f唯一地确定。

5．设A与B都是交换Banach代数，B还是半单代数；Ψ：$A\to B$是一个同态，其值域在B内稠密；又α：$\triangle_B\to\triangle_A$定义为

$$(\alpha h)(x)=h(\Psi(x)) \qquad (x\in A,\ h\in\triangle_B).$$

试证α是$\triangle_B$在$\triangle_A$的一个紧子集上的同胚。

（提示：$\Psi(A)$在B内稠密蕴涵α是一对一的，并且$\triangle_B$的拓扑是由元素$\Psi(x)$的Гельфанд变式导出的弱拓扑，$x\in A$。）

若取A为圆盘代数，$B=C(K)$，其中K是单位圆盘中的一段弧，而Ψ是A到B内的限制映射；那么，这个例子表明$\alpha(\triangle_B)$可

能是$\triangle_A$的一个真子集，即使Ψ是一对一的。

找出一个这样的例子：$\Psi(A)=B$，但是$\alpha(\triangle_B)\neq\triangle_A$.

6．我们曾经指出，§2.2.7的例2中的$\hat{A}\neq C(\triangle)$，试给出几种不同的证明。

7．完善§2.2.7的例6中的证明细节，并且指出该例用到Lebesgue测度的哪些性质。试问，能否随意取一个正测度来替代Lebesgue测度，而不影响其结论？

采用该例的记号，证明：对于任何Borel集$S\subset\triangle$，恒有$\hat{m}(S)=\hat{m}(\bar{S})$。因而，Borel集的边界是零测度集。

8．设$C^{(1)}$是单位区间〔0,1〕上的全体连续可微复值函数所构成的代数，乘法是点态相乘，范数定义为

$\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$.

（a）求证$C^{(1)}$是一个半单的交换Banach代数，并找出它的极大理想空间。

（b）选定p，$0\leqslant p\leqslant 1$，设J为满足条件$f(p)=f'(p)=0$的所有$f\in C^{(1)}$构成的集。求证J是$C^{(1)}$内的一个闭理想，而$C^{(1)}/J$是一个二维代数，它有一个一维的根。（这就得到了一个半单代数的商代数不再是半单代数的例子。）试问：$C^{(1)}/J$与第1章习题18中的两个代数当中的哪一个同构？

9．设A是圆盘代数。与各个$f\in A$相联系的函数$f^*\in A$定义为

$$f^*(z)=\overline{f(\bar{z})}.$$

这时，$f\mapsto f^*$是A上的一个对合。试问：

（a）这个对合能否使A成为C^*-代数？

（b）$\sigma(ff^*)$是不是一定在实数轴上？

（c）就这个对合而言，A的哪些复同态是正泛函？

（d）如果μ是〔-1,1〕上的一个有限正值Borel测度，那么

$$f\mapsto\int_{-1}^{1}f(t)\,d\mu(t)$$

是A上的一个正泛函。另外还有没有？

10. 求证两个交换幂等元之间的距离不小于1.

具体地说是这样：如果Banach代数A中的某些元x与y适合条件

$$x^2=x,\quad y^2=y,\quad xy=yx;$$

那么，$x=y$与$\|x-y\|\geq 1$二者必居其一。

但是，如果$xy\neq yx$，则上述结论未必成立。试证之。

11. 如果Banach代数A中的某些元x, y满足条件$xy=yx$，那么

$$\rho(xy)\leq\rho(x)\rho(y),$$

$$\rho(x+y)\leq\rho(x)+\rho(y)$$

必定成立。试证之。

12. 设t是一个足够大的正数，在C^2上定义$w=(w_1, w_2)$的范数为

$$\|w\|=|w_1|+t|w_2|$$

设A是全体2阶复方阵构成的代数，相应的算子范数为

$$\|y\|=\max\{\|y(w)\|:\ \|w\|=1\},\quad y\in A.$$

设y^*是$y\in A$的共轭转置。考虑一个固定的$x\in A$，即

$$x=\begin{pmatrix}0 & t^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

求证以下各项陈述：

(*a*) $\|x(w)\|=t\|w\|$，因而$\|x\|=t$;

(*b*) $\sigma(x)=\{t, -t\}=\sigma(x^*)$;

(*c*) $\sigma(xx^*)=\{1, t^4\}=\sigma(x^*x)$;

(*d*) $\sigma(x+x^*)=\{1+t^2, -1-t^2\}$;

(*e*) 因此，在定理2.4.3的推论1和习题11均须要求交换性;

(*f*) 对于$y\in A$，如果$F(y)$定义为y中的四项数值之和，那么F是A上的一个正泛函;

(*g*) 等式$\|F\|=F(e)$不能成立，因为有$F(e)=2$, $F(x)=1+t^2$，所以$\|F\|>t$;

（h）如果K是A上全体满足条件$f(e)\leqslant 1$的正泛函构成的集（就象在定理2.5.5中那样），那么K有许多极值点，尽管0是A上仅有的积性线性泛函。因此，在求证定理2.5.5的（c）蕴涵（a）时要求有交换性。

13. 定义在$\boldsymbol{R}^n$上的复值函数ϕ称为**正定的**，如果对于一切可能选取的$\boldsymbol{R}^n$内的$x_1, x_2, \cdots, x_r$和一切可能选取的复数$c_1, c_2, \cdots, c_r$，都有

$$\sum_{i,j=1}^{r} c_i \bar{c}_j \phi(x_i - x_j) \geqslant 0 .$$

试证：（a）对于任何$x \in \boldsymbol{R}^n$，都有$|\phi(x)| \leqslant \phi(0)$；

（b）$\boldsymbol{R}^n$上的每个有限正值Borel测度的Fourier变换都是正定的；

（c）如果ϕ是连续的和正定的，那么ϕ就是一个有限正值Borel测度的Fourier变换。

（提示：这是（b）的逆定理，通常称为Bochner定理。证明的大致思路如下。

设A是卷积代数$L^1(\boldsymbol{R}^n)$，添加了单位元，与§2.2.7的例5中用到的一样。定义$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$。证明

$$f + \alpha\delta \longmapsto \tilde{f} + \bar{\alpha}\delta$$

是A上的一个对合，而

$$f + \alpha\delta \longmapsto \int_{R^n} f\phi\, dm_n + \alpha\phi(0)$$

是A上的一个正泛函。由定理2.5.4和§2.2.7的例5可知，在$\boldsymbol{R}_n$的单点紧化$\triangle$上，有一个正测度μ使得

$$\int_{R^n} f\phi\, dm_n + \alpha\phi(0) = \int_{\triangle} (\hat{f} + \alpha)\, d\mu .$$

如果σ是μ对$\boldsymbol{R}^n$的限制，那么对于任何$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$将有

$$\int_{R^n} f\phi\, dm_n = \int_{R^n} \hat{f}\, d\sigma .$$

因而 $\phi=\hat{\sigma}$。（其实，μ已经集中在$\boldsymbol{R}^n$上，所以$\sigma=\mu$。）

（d）设P是$\boldsymbol{R}^n$上的连续正定函数ϕ当中满足条件 $\phi(0)\leqslant 1$ 者所构成的集。找出这个凸集的全部极值点：

14. 设A是 Banach 代数，m是一个整数，$m\geqslant 2$，$K<\infty$；对于每个$x\in A$都有

$$\|x\|^m\leqslant K\|x^m\|.$$

试证：存在与$n=1,2,\cdots$相应的常数$K_n\leqslant\infty$使得

$$\|x\|^n\leqslant K_n\|x^n\| \qquad (x\in A).$$

（这就推广了定理2.2.6的（b）。）

15. 设$\{w_n\}(-\infty<n<\infty)$ 是一个正数集合，其中 $w_0=1$，而且对一切整数m,n，满足条件

$$w_{m+n}\leqslant w_m w_n.$$

再设$A=A\{w_n\}$是全体定义在整数集上的复值函数f所构成的集，它们的范数

$$\|f\|=\sum_{k-\infty}^{\infty}|f(n)|w_n$$

为有限数。在A内的乘法定义为

$$(f*g)(n)=\sum_{k-\infty}^{\infty}f(n-k)g(k).$$

（a）试证各个$A\{w_n\}$均为交换Banach代数。

（b）试证$R_+=\lim\limits_{n\to\infty}(w_n)^{1/n}$存在并且是有限数，为此可以先证$R_+=\inf\limits_{n\geqslant 0}(w_n)^{1/n}$。

（c）类似地，求证$R_-=\lim\limits_{n\to\infty}(w_{-n})^{1/n}$存在，以及$R_-\leqslant R_+$。

（d）置$\Delta=\{\lambda\in\boldsymbol{C}:\ R_-\leqslant|\lambda|\leqslant R_+\}$。试证$\Delta$等同于$A\{w_n\}$的极大理想空间，并且Гельфанд变式是$\Delta$上的绝对收敛的Laurent级数。

（e）考虑$\{w_n\}$的以下几种选法：

(i) $w_n = 1$;

(ii) $w_n = 2^n$;

(iii) $w_n = 2^n$，如果$n \geqslant 0$，

$w_n = 1$，如果$n < 0$；

(iv) $w_n = 1 + 2n^2$；

(v) $w_n = 1 + 2n^2$，如果$n \geqslant 0$，

$w_n = 1$，如果$n < 0$。

其中哪些使得$\triangle$是一个圆？又有哪些选法使得$A\{w_n\}$是自伴的？所谓自伴的意思是，$\hat{A}$在复共轭之下封闭。

(f) $A\{w_n\}$总是半单代数吗？

(g) 有没有一个$A\{w_n\}$，其$\triangle$是单位圆，且使$\hat{A}$完全由无穷次可微函数所构成？

第3章　Hilbert空间上的有界算子

这一章主要是研究算子理论中经常涉及到的一个重要的 C^*-代数，即 Hilbert 空间H上的全体有界线性算子所构成的 Banach代数$\mathscr{B}$ (H)。将要得到的最重要的结果是：$\mathscr{B}(H)$ 内的每个正规算子T可以诱导出在它的谱$\sigma(T)$的Borel 子集上的单位分解E，然后用积分法重新组成T。本章的后一部分充分地利用了这个结果。定理 3.7.3 可以看作 C^*-代数的表示定理，因此将它作为本章的结束语。

3.1　基本概念

这一节只要介绍为以后的讨论所必需的Hilbert空间 H 和定义在H上的有界算子的知识。更详尽的叙述可以从任何一本泛函分析的标准著作中找到。

3.1.1　定义　复向量空间H称为**内积空间或酉空间**，如果由H内的各个向量x, y作成的有序偶与一个复数 (x, y) 相联系，这个复数称为x与y的**内积或纯量积**，并且遵守以下规则：

(a) $(x,y)=\overline{(y, x)}$（横线表示复共轭）；

(b) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$；

(c) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$ $(\alpha\in\mathbf{C})$；

(d) $(x, x)\geqslant 0$，$(x, x)=0$ 当且仅当$x=0$。

若固定y，则 (x, y) 将成为x的线性函数；而固定x时，(x, y) 将是y的共轭线性函数。这种二元函数又可称为**半双线性的**.

如果 $(x, y)=0$，就说x**正交**y，记作$x\perp y$。由于 $(x, y)=0$ 蕴涵 $(y, x)=0$，因此关系$\perp$是对称的。如果 $E\subset H$，又$F\subset H$，那么记号$E\perp F$意味着对于任何$x\in E$与任何$y\in F$都有$x\perp y$。

另外，记号$E^{\perp}$表示与每个$x\in E$正交的$y\in H$的全体构成的集。

任何内积空间都能赋予范数

$$\|x\|=(x, x)^{1/2}.$$

下面的定理3.1.2蕴涵这一事实。

如果赋范内积空间是完备的，就称之为Hilbert空间，记作H.今后,如果没有其它的声明,字母H仅用以表示Hilbert空间.

3.1.2 定理 内积空间H内的任何两个元素x, y都满足不等式

（1）　　$|(x, y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|$　　（Schwarz不等式）；

以及

（2）　　$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

此外，对于任何$\lambda\in C$,

（3）　　$\|y\|\leqslant\|\lambda x+y\|$

成立，当且仅当$x\perp y$。

证 置$\alpha=(x, y)$。经过简单的计算，可以得到

（4）　　$0\leqslant\|\lambda x+y\|^2=|\lambda|^2\|x\|^2+2R_e(\alpha\lambda)+\|y\|^2$.

因此，如果$\alpha=0$，则（3）成立。如果$x=0$，（1）和（3）显然成立。如果$x\neq 0$，取$\lambda=-\overline{\alpha}/\|x\|^2$. 用这个$\lambda$值代入（4）式，将得到

（5）　　$0\leqslant\|\lambda x+y\|^2=\|y\|^2-|\alpha|^2/\|x\|^2$.

这就证得（1）式，同时看到了$\alpha\neq 0$时（3）式不能成立。最后，将（2）式两端平方，就能看出（2）式是（1）式的推论。 □

由Schwarz不等式立即可知：内积(x, y)是x, y的二元连续泛函。

有了内积的连续性，就很容易验证：如果$E\subset H$, $\overline{E}=H$，那么$x\perp E$时必定是$x=0$。

3.1.3 定理 任何非空闭凸集$E\subset H$都含有唯一的极小范数元.

证 首先指出，对于任何$x\in H$, $y\in H$均可由范数定义得到平行四边形法则

（1）　　$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

然后，设

$$d=\inf\{\|x\|: x\in E\}.$$

选取 $z_n\in E$ 使 $\|z_n\|\to d$。由于 E 是凸集，应当有 $\frac{1}{2}(z_n+z_m)\in E$，因此 $\|z_n+z_m\|^2\geqslant 4d^2$。如果将（1）式中的 x 与 y 分别换成 z_n 与 z_m，则（1）式右端将趋于 $4d^2$。于是，（1）式蕴涵 $\{z_n\}$ 是 H 内的Cauchy序列，因此它收敛于某个 $z\in E$，其范数 $\|z\|=d$。这个 z 即为所求的极小范数元。

假如另有一个 $w\in E$ 且 $\|w\|=d$，那么序列 $\{z, w, z, w, \cdots\}$ 必定收敛，因此 $w=z$。 □

3.1.4 定理 如果 M 是 H 的一个闭子空间，那么

$$H=M\oplus M^{\perp}.$$

更明确地说，定理指出：H 可以表示为任一闭子空间 M 与其正交补 $M^{\perp}$ 的**直和**（记作 $\oplus$），这个 $M^{\perp}$ 与 M 的交是 $\{0\}$。

证 设 $E\subset H$，注意到 (x, y) 作为 x 的函数所具有的线性，即可推知 $E^{\perp}$ 是 H 的一个子空间；而内积的连续性则蕴涵 $E^{\perp}$ 是闭集。

如果 $x\in M$ 且 $x\in M^{\perp}$，则 $(x, x)=0$，因而 $x=0$。所以 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$。

任取 $x\in H$，对集合 $x-M$ 应用定理3.1.3，将有唯一的 $x_1\in M$ 使 $\|x-x_1\|$ 最小。记 $x_2=x-x_1$。这时，对于一切 $y\in M$，都有 $\|x_2\|\leqslant\|x_2+y\|$。于是，由定理3.1.2又可知 $x_2\in M^{\perp}$。既然任何元 $x\in H$ 都能分解为 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in M$, $x_2\in M^{\perp}$；那么就已证得 $H=M\oplus M^{\perp}$。 □

推论 如果 M 是 H 的一个闭子空间，那么恒有

$$(M^{\perp})^{\perp}=M.$$

证 包含关系 $M\subset(M^{\perp})^{\perp}$ 是显而易见的。另外，由于

$$M\oplus M^{\perp}=H=M^{\perp}\oplus(M^{\perp})^{\perp},$$

M 就不可能是 $(M^{\perp})^{\perp}$ 的真子集。 □

下面的定理涉及 H 的对偶空间 H^*。

3.1.5 定理（Riesz表示定理）有一个从H到H^*上的共轭线性等距$y\mapsto\Lambda$，由下式给出：

（1）　　$\Lambda x=(x, y)\qquad(x\in H)$。

证　如果$y\in H$，而Λ由（1）式定义，则由定理3.1.2的Schwarz不等式可知$\Lambda\in H^*$，且$\|\Lambda\|\leqslant\|y\|$。又因为有

（2）　　$\|y\|^2=(y, y)=\Lambda y\leqslant\|\Lambda\|\ \|y\|$，

所以$\|\Lambda\|=\|y\|$。

尚须指出，每个$\Lambda\in H^*$都能表示为（1）式。

若$\Lambda=0$，可取$y=0$。若$\Lambda\neq0$，设$\mathcal{N}(\Lambda)$为Λ的零空间。根据定理3.1.4，将有$z\in\mathcal{N}(\Lambda)^\perp$，$z\neq0$。因为

（3）　　$(\Lambda x)z-(\Lambda z)x\in\mathcal{N}(\Lambda)\qquad(x\in H)$

所以

$$(\Lambda x)(z, z)-(\Lambda z)(x, z)=0.$$

这时，只要选取

$$y=(z, z)^{-1}\overline{(\Lambda z)}z,$$

就能保证（1）式成立。　□

3.1.6 定理　如果$\{x_n\}$是H内两两正交的向量序列，那么，以下三项陈述当中的每一项都蕴涵另外二项：

（a）$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$依H的范数拓扑收敛；

（b）$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$；

（c）对于任何$y\in H$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$都是收敛的。

因此，就两两正交的向量的级数来说，（a）中提到的强收敛与（c）中提到的弱收敛是等价的。

证　由于$i\neq j$时$(x_i, x_j)=0$，故$n\leqslant m$时将有等式

（1）　　$\|x_n+\cdots+x_m\|^2=\|x_n\|^2+\cdots+\|x_m\|^2$

成立。因此（b）蕴涵$\sum x_n$的部分和构成H内的Cauchy序列，既

然H完备，可见（b）蕴涵（a）。

Schwarz不等式表明（a）蕴涵（c）。

最后求证（c）蕴涵（b）。为此，假定（c）成立。定义$\Lambda_n \in H^*$为

$$(2)\qquad \Lambda_n y = \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) \qquad (y \in H,\ n = 1, 2, \cdots).$$

按照(c)，$\{\Lambda_n y\}$对于每个$y \in H$都收敛，因此，由Banach-Steinhaus定理推知$\{\|\Lambda_n\|\}$是有界的。然而

$$(3)\qquad \|\Lambda_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| = (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{1/2}.$$

可见（c）蕴涵(b)。 □

下面将简要叙述H空间上有界算子的最基本的事实。在此重申，记号$\mathscr{B}(H)$表示的是Hilbert空间$H \neq \{0\}$上的全体有界线性算子T所构成的Banach代数，赋予范数

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|: x \in H, \|x\| \leqslant 1\}.$$

在§3.1.9中将要说明，$\mathscr{B}(H)$有一个对合，从而使它成为一个C^*-代数。

我们先从非常简单但是很有用处的唯一性定理开始。

3.1.7 定理 如果$T \in \mathscr{B}(H)$对于任何$x \in H$都有$(Tx, x) = 0$，那么$T = 0$。

证 任取$x \in H$, $y \in H$，由$(T(x+y), x+y) = 0$可以得到

$$(1)\qquad (Tx, y) + (Ty, x) = 0.$$

将（1）式中的y易之为iy，结果是

$$(2)\qquad -i(Tx, y) + i(Ty, x) = 0.$$

再将（2）式乘以i，然后加到（1）式上去，就得

$$(3)\qquad (Tx, y) = 0.$$

既然y可以是H内的任意元，无妨取$y = Tx$，这时（3）式化为$\|Tx\|^2 = 0$。这表明对任何$x \in H$都有$Tx = 0$，因此$T = 0$。

□

推论 如果$S \in \mathscr{B}(H)$，$T \in \mathscr{B}(H)$，又对于任何$x \in H$都有$(Sx, x) = (Tx, x)$，那么$S = T$。

证 这是将定理应用于算子$S-T$所得的结果.

□

还应当指出，如果纯量域是$\mathbf{R}$，定理 3.1.7 将不能成立. 只须考查$\mathbf{R}^2$内的转动，就得到相应的反例.

3.1.8 定理 如果f: $H\times H\to \mathbf{C}$是半双线性的，又是有界的，即

(1) $$M=\sup\{|f(x, y)|: \|x\|=\|y\|=1\}<\infty,$$

那么，存在唯一的$S\in\mathscr{B}(H)$满足条件

(2) $$f(x, y)=(x, Sy) \qquad (x\in H, y\in H);$$

以及$\|S\|=M$.

证 由于$|f(x, y)|\leqslant M\|x\|\|y\|$，因而对于每个$y\in H$来说，映射

$$x\mapsto f(x, y)$$

是H上的有界线性泛函，其范数不超过$M\|y\|$. 这时，由定理3.1.5可知，每个$y\in H$对应了唯一的元素$Sy\in H$，使(2)式成立；并且$\|Sy\|\leqslant M\|y\|$. 显然S: $H\to H$是可加的. 如果$\alpha\in\mathbf{C}$，那么，对于H内的任何x, y都有

$$(x, S(\alpha y))=f(x, \alpha y)=\bar{\alpha}f(x, y)=\bar{\alpha}(x, Sy)=(x, \alpha Sy).$$

因而S是线性的. 至此证明了$S\in\mathscr{B}(H)$以及$\|S\|\leqslant M$. 但是，还有

$$|f(x, y)|=|(x, Sy)|\leqslant\|x\|\|Sy\|\leqslant\|x\|\|S\|\|y\|,$$

这将得出$M\leqslant\|S\|$. 所以$\|S\|=M$. □

3.1.9 伴随算子 如果$T\in\mathscr{B}(H)$，那么(Tx, y)就x来说是线性的，而它就y来说是共轭线性的，并且有界. 因此，由定理3.1.8可知：存在唯一的$T^*\in\mathscr{B}(H)$，对于任何x, $y\in H$都有

(1) $$(Tx, y)=(x, T^*y),$$

以及

(2) $$\|T^*\|=\|T\|.$$

还可以验证$T\mapsto T^*$是$\mathscr{B}(H)$上的一个对合，亦即，它具有

以下性质：

（3） $(T+S)^*=T^*+S^*$；

（4） $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$；

（5） $(ST)^*=T^*S^*$；

（6） $T^{**}=T$。

其中（3）是显而易见的。经过实际计算

$(\alpha Tx, y)=\alpha(Tx, y)=\alpha(x, T^*y)=(x, \bar{\alpha}T^*y)$；

$(STx, y)=(Tx, S^*y)=(x, T^*S^*y)$；

$(Tx, y)=\overline{(T^*y, x)}=\overline{(y, T^{**}x)}=(T^{**}x, y)$，

就能得到（4）～（6）。

任取$x\in H$，由

$$\|Tx\|^2=(Tx, Tx)=(T^*Tx, x)\leqslant\|T^*T\|\ \|x\|$$

可知$\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$；但是，由（2）式又有

$$\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\ \|T\|=\|T\|^2,$$

因此每个$T\in\mathscr{B}(H)$都使得

$$\|T^*T\|=\|T\|^2$$

成立。

于是，我们证明了，采用（1）式所定义的对合 $T\mapsto T^*$将使$\mathscr{B}(H)$成为一个C^*-代数。

在前述背景之下，T^*称为算子T的**伴随算子**。

应当强调指出，这里定义的T^*与T一样，都是H空间上的算子；映射$T\mapsto T^*$是共轭线性的，而不是线性的。

3.1.10 定理 $T\in\mathscr{B}(H)$的零空间$\mathscr{N}(T)$与值域$\mathscr{R}(T)$及其伴随算子T^*的零空间$\mathscr{N}(T^*)$与值域$\mathscr{R}(T^*)$有以下关系：

$$\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^\perp;$$

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^*)^\perp.$$

证 下列四项陈述当中的各项都等价于它后面的或前面的一项：

（1） $T^*y=0$；

（2） $(x, T^*y)=0$ （任何$x\in H$）；

（3）　　$(Tx, y)=0$　　（任何$x\in H$）；

（4）　　$y\in\mathscr{R}(T)^{\perp}$。

因此$\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp}$。

由于$T^{**}=T$，只须将第一个结论中的T换成T^*，就得到

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^*)^{\perp}. \qquad \square$$

3.1.11 定义　$T\in\mathscr{B}(H)$称为

（a）**正规算子**，如果$TT^*=T^*T$；

（b）**自伴算子**（或Hermite算子），如果$T^*=T$；

（c）**酉算子**，如果$T^*T=I=TT^*$，其中I是H上的恒等算子；

（d）**射影算子**，如果$T^2=T$。

显然，自伴算子和酉算子也都是正规算子。这一章将要给出的定理，其中大多数是有关正规算子的。

3.1.12 定理　对于正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$来说，以下各个命题成立：

（a）任何$x\in H$都有$\|Tx\|=\|T^*x\|$，而且这是T作为正规算子的充分必要条件；

（b）$\mathscr{N}(T)=\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp}$；

（c）如果某些$x\in H$与$\alpha\in\mathbf{C}$使$Tx=\alpha x$，那么$T^*x=\overline{\alpha}x$；

（d）如果α, β是T的两个不同的特征值，那么，它们所对应的两个特征空间彼此正交。

证　为了证明（a），只须将以下两个等式

$$\|Tx\|^2=(Tx, Tx)=(T^*Tx, x),$$

$$\|T^*x\|^2=(T^*x, T^*x)=(TT^*x, x)$$

与定理3.1.7的推论结合起来。（b）显然来自（a）和定理3.1.10。将（b）中的T换成$T-\alpha I$，就能得到（c）。最后，设

$$Tx=\alpha x, \qquad Ty=\beta y;$$

并且利用（c）推导出

$$\alpha(x, y)=(\alpha x, y)=(Tx, y)=(x, T^*y)$$
$$=(x, \overline{\beta}y)=\beta(x, y).$$

既然$\alpha\neq\beta$，那么必定是$(x, y)=0$，亦即$x\perp y$。 □

3.1.13 定理 有关算子$U\in\mathscr{B}(H)$的以下三项陈述是等价的：

（a）U是酉算子；

（b）$\mathscr{R}(U)=H$，并且对于任何$x\in H$, $y\in H$都有$(Ux, Uy)=(x, y)$；

（c）$\mathscr{R}(U)=H$，并且对于任何$x\in H$都有$\|Ux\|=\|x\|$，因而$\|U\|=1$.

证 U是酉算子时，有$UU^*=I$，因此$\mathscr{R}(U)=H$；另外，还有$U^*U=I$，于是

$$(Ux, Uy)=(x, U^*Uy)=(x, y).$$

这就证明了（a）蕴涵（b）。

显然（b）蕴涵（c）。

如果（c）成立，那么，任何$x\in H$都能使

$$(U^*Ux, x)=(Ux, Ux)=\|Ux\|^2$$
$$=\|x^2\|=(x, x),$$

因此$U^*U=I$。但是（c）还蕴涵U是从H到H上的一个线性等距，所以U在$\mathscr{B}(H)$内是可逆元。于是，由$U^*U=I$可得$U^{-1}=U^*$，进而有$UU^*=I$。因此U是酉算子 □

（a）与（b）等价表明，酉算子恰好是H的那些能够保持内积不变的线性同构。因此，它们也是H空间自同构。

（b）与（c）等价则是本章习题2的一个推论。

3.1.14 定理 射影算子$P\in\mathscr{B}(H)$的以下四个性质当中的每一个都蕴涵其它三个：

（a）P是自伴算子；

（b）P是正规算子；

（c）$\mathscr{R}(P)=\mathscr{N}(P)^{\perp}$；这个性质通常表述为：$P$是一个正交射影算子；

（d）对于任何$x\in H$都有$(Px, x)=\|Px\|^2$。

证 （a）蕴涵（b）是显而易见的。

如果P是正规算子，则 $\mathscr{N}(P)=\mathscr{R}(P)^{\perp}$. 因为$\mathscr{R}(P)=\mathscr{N}(I-P)$，而$I-P$是线性连续算子，它的零空间是$H$的闭线性子空间，所以$\mathscr{R}(P)$是闭集. 这时，由定理3.1.4的推论可知 ($b$) 蕴涵 ($c$).

如果(c)成立，则任何$x\in H$均可分解为$x=y+z$，其中$y\perp z$，且$Py=0$，$Pz=z$. 因此$Px=z$，且$(Px, x)=(z, z)$. 这就是(d).

最后，假设 (d) 成立. 这时

$$\|Px\|^2=(Px, x)=(x, P^*x)=(P^*x, x).$$

由于$\|Px\|^2$是实数，所以最后一个等号是合理的. 既然任何$x\in H$都有 $(Px, x)=(P^*x, x)$，那么应用定理3.1.7的推论即可得出$P=P^*$. 于是证明了 (d) 蕴涵 (a). □

3.1.15 定理 对于自伴算子 $S\in\mathscr{B}(H)$ 来说，$ST=0$ 当且仅当$\mathscr{R}(S)\perp\mathscr{R}(T)$.

证 $(Sx, Ty)=(x, STy)$. □

这个结果将要经常应用于S与T都是正交射影算子的情况.

这一节的最后一个定理将要研究$\mathscr{B}(H)$的交换性.

在具有对合的Banach代数中，如果x, y是交换元，则x^*, y^*显然也是交换元，因为有$x^*y^*=(yx)^*$. 若是再问：x与y^*是否交换？答案将是否定的. 只须让x不是正规元，且取$y=x$，就得到相应的反例. 其实，即使x，y都是正规元，答案仍然可能是否定的（参看本章习题26）. 但是，就$\mathscr{B}(H)$而言，这个命题对于正规算子却有肯定的结论：如果$N\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，它与$T\in\mathscr{B}(H)$交换，即$NT=TN$，那么，将有$N^*T=TN^*$.

然而，我们还可以得到下述更为一般的结论.

3.1.16 定理 (Fuglede-Putnam-Rosenblum交换性定理) 如果$M, N, T\in\mathscr{B}(H)$，其中M, N是正规算子，且有

(1) $\qquad MT=TN,$

那么，必定 $M^*T=TN^*$.

证 首先，任取$S\in\mathscr{B}(H)$，置$V=S-S^*$，并且定义

(2) $$Q=\exp(V)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)V^n.$$

这时，由$V^*=-V$可得

(3) $$Q^*=\exp(V^*)=\exp(-V)=Q^{-1}.$$

因而Q是酉算子，并且有

(4) $$\|\exp(S-S^*)\|=1.$$

当（1）式成立时，由归纳法可以得出

$$M^kT=TN^k \qquad (k=1, 2, \cdots).$$

因此又有

(5) $$\exp(M)T=T\exp(N),$$

或写作

(6) $$T=\exp(-M)T\exp(N).$$

再置$U_1=\exp(M^*-M)$, $U_2=\exp(N-N^*)$，既然M, N都是正规算子，那么由（6）式将能得出

(7) $$\exp(M^*)T\exp(-N^*)=U_1TU_2.$$

根据（4）式，有$\|U_1\|=\|U_2\|=1$，因此（7）式蕴涵

(8) $$\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\|\leqslant\|T\|.$$

现在，我们定义

(9) $$f(\lambda)=\exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*) \qquad (\lambda\in\boldsymbol{C}).$$

注意到题设条件中的M, N可以换成$\bar\lambda M$, $\bar\lambda N$；因此（8）式蕴涵$\|f(\lambda)\|\leqslant\|T\|$对于一切$\lambda\in\boldsymbol{C}$都成立。这表明$f$是有界$\mathscr{B}(H)$-值整函数。根据定理1.3.8 (Liouville)，$f(\lambda)$应当是常值函数，于是$f(\lambda)=f(0)=T$。这时，（9）式变成

(10) $$\exp(\lambda M^*)T=T\exp(\lambda N^*) \qquad (\lambda\in\boldsymbol{C}).$$

因为（10）式两端的λ项的系数必须相等，所以

$$M^*T=TN^*.$$ □

读者也许已经注意到，上述证明过程中没有用到$\mathscr{B}(H)$的并非每个C^*-代数都具有的性质，但是，因为有后面的定理3.7.3，本定理不可能再做实质性的推广。

3.2 单位分解

3.2.1 定义

设$\mathfrak{M}$是集合 Ω 内的σ-代数。$\mathfrak{M}$的元素的可列集 族 $\{\omega_i\}$ 称为ω的一个**划分**，若$\omega=\bigcup\omega_i$，且当$i\neq j$时$\omega_i\cap\omega_j=\varnothing$。

$\mathfrak{M}$上的**复测度**μ是$\mathfrak{M}$上的一个复涵数，使得

$$\mu(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\omega_i) \qquad (\omega\in\mathfrak{M}) \tag{1}$$

对于ω的每一个划分$\{\omega_i\}$都能成立。

实际上，定义要求级数（1）绝对收敛。因为当下标改变顺序时，诸集ω_i的并仍是 ω，所以级数（1）的每一种排列都必须收敛。

所谓在$\mathfrak{M}$上的**单位分解**，乃是映射

$$E:\ \mathfrak{M}\to\mathscr{B}(H),$$

且具备下列几个性质：

(a) $E(\varnothing)=0$，$E(\Omega)=I$；

(b) 各个$E(\omega)$均为自伴射影算子；

(c) $E(\omega'\cap\omega'')=E(\omega')E(\omega'')$；

(d) 若$\omega'\cap\omega''=\varnothing$，则有$E(\omega'\cup\omega'')=E(\omega')+E(\omega'')$；

(e) 对于一切$x\in H$，$y\in H$，定义集函数$E_{x,y}$为

$$E_{x,y}(\omega)=(E(\omega)x,\ y),$$

这是$\mathfrak{M}$上的一个复测度。

当$\mathfrak{M}$是紧或局部紧的 Hausdorff 空间上的全体 Borel集构成的σ-代数时，通常还要对(e) 附加另一个条件：每个 $E_{x,y}$都是正则Borel 测度。例如，在紧赋范空间上，这个条件能自动地得到满足。

由性质 (a)～(e) 可以立即得出以下推论。

Ⅰ．既然各个$E(\omega)$均为自伴射影算子，那么应当有

$$E_{x,x}(\omega)=(E(\omega)x,\ x)=\|E(\omega)x\|^2 \quad (x\in H). \tag{2}$$

所以每个$E_{x,x}$都是$\mathfrak{M}$上的正测度，其全变差为

(3) $$\| E_{x,x} \| = E_{x,x}(\Omega) = \| x \|^2.$$

Ⅱ．由(c)可知，各个射影算子$E(\omega)$彼此是交换的。

Ⅲ．如果$\omega' \cap \omega'' = \varnothing$，那么($a$)和($c$)表明$E(\omega')$与$E(\omega'')$的值域正交。

Ⅳ．由(d)可知，E是有限可加的。

进一步自然会想到，E是否为可列可加的？亦即，级数

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)$$

能否按照$\mathscr{B}(H)$的范数拓扑收敛于$E(\omega)$，其中的ω是各个彼此不相交的集$\omega_n \in \mathfrak{M}$的并集。由于射影算子的范数或者是0，或者至少是1，级数(4)的部分和将无法成为Cauchy序列，除了一切有限多项中的$E(\omega_n)$都等于零这种特款。因此E不是可列可加的。但是，选定$x \in H$然后考虑$E(\omega)x$时，却有不同的结论。

仍设ω是一列彼此不相交的集$\{\omega_n\} \subset \mathfrak{M}$的并集。由于$n \neq m$时$E(\omega_n)E(\omega_m) = 0$，因而$E(\omega_n)x$与$E(\omega_m)x$正交。再由($e$)，对于任何$y \in H$都有

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} (E(\omega_n)x, y) = (E(\omega)x, y).$$

这时，应用定理3.1.6就可以得到

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E(\omega)x,$$

以及级数(6)依H的范数拓扑收敛。

于是，我们证明了下面的定理。

3.2.2 定理 如果E是单位分解，那么对于选定的$x \in H$来说

$$\omega \longmapsto E(\omega)x$$

是$\mathfrak{M}$上的可列可加的H-值测度。 □

至于零测度集，则可以用通常的方式处理。

推论 设E是单位分解，$\omega_n \in \mathfrak{M}$，$E(\omega_n)=0(n=1, 2, \cdots)$且$\omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n$，那么$E(\omega)=0$。

证 由于$E(\omega_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$，因此对任何$x \in H$都有$E_{x,x}(\omega_n)=0$。既然$E(\omega)x$是可列可加的，又可以得到$E_{x,x}(\omega)=0$。但是，由于$\|E(\omega)x\|^2=E_{x,x}(\omega)$以及$x$的任意性，必定导致$E(\omega)=0$。 □

3.2.3代数$L^\infty(E)$

设E为前述$\mathfrak{M}$上的单位分解。再设f为Ω上的**复$\mathfrak{M}$-可测函数**。有可列个开圆盘$\{D_i\}$。按照C的拓扑，它们构成一组基底。设V是使$E(f^{-1}(D_i))=0$的诸D_i的并集。根据定理3.2.2的推论，有$E(f^{-1}(V))=0$。而且V是C的具有这一性质的最大子集。

按照定义，f的**本性值域**是V的补集。它是C的包含$f(p)$的最小的闭子集，$f(p)$对于几乎所有$p \in \Omega$都有意义，这就是除去那些在某个集$\omega \in \mathfrak{M}$中而$E(\omega)=0$所余的全体$p \in \Omega$。

如果f的本性值域是有界的，我们就说它是**本性有界的**，因而也是紧的。这时，让λ遍历f的本性值域，$|\lambda|$的最大值称为f的**本性上确界**，记作$\|f\|_\infty$。

设B是Ω上的全体有界复$\mathfrak{M}$-可测函数构成的代数，赋予范数

$$\|f\|=\sup\{|f(p)|: p \in \Omega\},$$

容易验证B是一个Banach代数，而且

$$N=\{f \in B: \|f\|_\infty=0\}$$

是B的一个理想。由定理3.2.2的推论可知，N是闭集。因此B/N是一个Banach代数，通常将它记作$L^\infty(E)$。

这样，在$L^\infty(E)$中，任何陪集$[f]=f+N$的范数都等于$\|f\|_\infty$，而且它的谱$\sigma([f])$就是f的本性值域。与通常在测度论中的做法一样，f与其等价类$[f]$之间的差别可以忽略。

3.2.4 定理 如果E是定义3.1.1中所述$\mathfrak{M}$上的单位分解，那么公式

(1) $$(\psi(f)x,\ y)=\int_{\Omega} f dE_{x,y} \quad (x\in H,\ y\in H)$$

将确定一个从Banach代数 $L^{\infty}(E)$ 到$\mathscr{B}(H)$ 的一个闭的正规子代数A上的等距同构ψ。这个同构还满足条件

(2) $$\psi(\bar{f})=\psi(f)^{*} \qquad (f\in L^{\infty}(E)),$$

以及

(3) $$\|\psi(f)x\|^{2}=\int_{\Omega}|f|^{2}dE_{x,x}.$$

此外，任一算子$Q\in\mathscr{B}(H)$与每个$E(\omega)$交换，当且仅当Q与每个$\psi(f)$交换。

公式（1）有时简写成

(4) $$\psi(f)=\int_{\Omega} f dE.$$

还可以提示一下，按照定义2.4.4，$\mathscr{B}(H)$的正规子代数A应当是一个交换代数，并且$T\in A$的同时有$T^{*}\in A$.

证 首先设$\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\omega_n\}$是$\Omega$的一个有限划分，诸$\omega_i\in\mathfrak{M}$；又设$s$为简单函数，即在$\omega_i$上$s=\alpha_i$。定义$\psi(s)\in\mathscr{B}(H)$为

(5) $$\psi(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(\omega_i).$$

由于各个$E(\omega_i)$是自伴算子，因此

(6) $$\psi(s)^{*}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\,E(\omega_i)=\psi(\bar{s}).$$

如果$\{\omega_1',\ \omega_2',\ \cdots,\ \omega_m'\}$是$\Omega$的另一个有限划分，又设在$\omega_j'$上$t=\beta_j$，那么

$$\psi(s)\psi(t)=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j E(\omega_i)E(\omega_j')$$

$$=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j E(\omega_i\cap\omega_j').$$

由于st是简单函数，即在$\omega_i\cap\omega_j$上取值$\alpha_i\beta_j$，因此得到

(7) $\phi(s)\phi(t)=\phi(st)$。

经过类似的讨论，还能得到

(8) $\phi(\alpha s+\beta t)=\alpha\phi(s)+\beta\phi(t)$。

任取$x\in H$，$y\in H$，（5）式将导致

(9)
$$(\phi(s)x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(E(\omega_i)x,\ y)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_{x,y}(\omega_i)$$
$$=\int_\Omega s dE_{x,y}.$$

由（6）和（7），又有

(10) $\phi(s)^*\phi(s)=\phi(\bar{s})\phi(s)=\phi(\bar{s}s)=\phi(|s|^2)$。

于是，从（9）式将引出

(11)
$$\|\phi(s)x\|^2=(\phi(s)^*\phi(s)x,\ x)$$
$$=(\phi(|s|^2)x,\ x)$$
$$=\int_\Omega |s|^2 dE_{x,x}.$$

这时，利用定义3.2.1中的公式（3）可以得到

(12) $\|\phi(s)x\|\leqslant\|s\|_\infty\|x\|$.

另一方面，如果$x\in\mathscr{R}(E(\omega_i))$，由于各个射影算子$E(\omega_i)$的值域彼此正交，应当有

(13) $\phi(s)x=\alpha_i E(\omega_i)x=\alpha_i x$。

倘若选取某个i_0使$|\alpha_{i_0}|=\|s\|_\infty$，那么，由（12）和（13）就能得到

(14) $\|\phi(s)\|=\|s\|_\infty$。

现在，设$f\in L^\infty(E)$，有一简单可测函数序列s_k依$L^\infty(E)$的范数收敛于f。由(14)可知，对应的算子序列$\phi(s_k)$在$\mathscr{B}(H)$内构成一个Cauchy序列，因而依范数收敛于一个算子，我们记之

为$\phi(f)$。容易看出，$\phi(f)$并不依赖$\{s_k\}$的特定选法。如将（14）式中的s换成s_k，再让$s_k \to f$，就得到

$$(15) \qquad \|\phi(f)\| = \|f\|_\infty.$$

由于各个$E_{x,y}$都是有限测度，如果将（9）式中的s换成s_k，然后取极限，就可以得到（1）式；而（2）和（3）则来自（6）和（11）。又如有界可测函数f与g是由简单可测函数s与t依$L^\infty(E)$的范数去逼近的，那么，用f与g替换s与t之后，(7)和（8）仍能成立。

至此证得，ϕ是$L^\infty(E)$到$\mathscr{B}(H)$内的一个等距同构。因为$L^\infty(E)$完备，所以由(15)式可知：象集$A=\phi(L^\infty(E))$，在$\mathscr{B}(H)$内是闭集。

最后，如果Q与每个$E(\omega)$交换，那么当s是简单函数时，Q将与$\phi(s)$交换。因此，前面用到的逼近过程将能证明Q与A的每个元都交换。 □

3.3 谱定理

这一节将要叙述本章最重要的结论：H空间上每个有界正规算子T可以诱导出在它的谱$\sigma(T)$的Borel子集上的单位分解E；并且能够用定理3.2.4中讨论过的那种类型的积分重新组成T。正规算子理论的很大一部分要依靠这个事实。

如所周知，算子$T\in\mathscr{B}(H)$的谱$\sigma(T)$当然是要顾及整个代数$\mathscr{B}(H)$，因为$\lambda\in\sigma(T)$当且仅当$T-\lambda I$在$\mathscr{B}(H)$内没有逆算子。然而，如果考虑$\mathscr{B}(H)$内的闭子代数A，它有可加性，$I\in A$，$T\in A$的同时有$T^*\in A$（这种代数也可称为*-代数）；由于$\mathscr{B}(H)$是一个C^*-代数，那么，定理2.4.8已经证明$\sigma(T)=\sigma_A(T)$。因此，对于$\mathscr{B}(H)$内一切含有T的闭*-代数来说，T的谱都是相同的。

3.3.1 定理 如果A是$\mathscr{B}(H)$的一个闭正规子代数，它含有恒等算子I，又设$\triangle$为A的极大理想空间，那么以下的论断是正确的：

(*a*) 存在唯一的在△的 Borel 子集上的单位分解E，所有的$T\in A$都满足

$$(1)\qquad T=\int_{\triangle}\hat{T}\,dE$$

其中的$\hat{T}$是T的Гельфанд 变式；与定理3.2.4中的记法一样，公式（1）意味着

$$(2)\qquad (Tx,\ y)=\int_{\triangle}\hat{T}\,dE_{x,y}\qquad (x\in H,y\in H);$$

(*b*) 每个非空开集$\omega\subset\triangle$都使$E(\omega)\neq 0$；

(*c*) 算子$S\in\mathscr{B}(H)$与每个$T\in A$交换，当且仅当S与每个射影算子$E(\omega)$交换.

证 我们约定，证明的叙述中$x\in H$，$y\in H$，$T\in A$，以后将不再赘述。

由于$\mathscr{B}(H)$是C^*-代数，指定的A应是交换C^*-代数. 根据定理2.3.4（Гельфанд—Наймарк），$T\mapsto\hat{T}$为A到$C(\triangle)$上的一个等距*-同构. 这时，由$\|\hat{T}\|_\infty=\|T\|$可知

$$(3)\qquad \hat{T}\mapsto(Tx,\ y)$$

是$C(\triangle)$上的一个有界线性泛函，其范数$\leqslant\|x\|\,\|y\|$. 于是，有界线性泛函的Riesz 表示定理（参看〔14〕的定理6.19）将保证△上有唯一的正则复Borel测度$\mu_{x,y}$使得

$$(4)\qquad (Tx,\ y)=\int_{\triangle}\hat{T}\,d\mu_{x,y}.$$

当$\hat{T}$为实数值时，T是自伴算子，因而$(Tx,\ y)$与$(Ty,\ x)$是一对共轭复数. 这就有

$$(5)\qquad \mu_{x,y}=\overline{\mu_{y,x}}.$$

就固定的$T\in A$而言，（4）式左端的内积对于x来说是线性的，对于y来说则是共轭线性的. 因此，测度$\mu_{x,y}$的唯一性蕴涵：对于每个Borel集$\omega\subset\triangle$来说，$\mu_{x,y}(\omega)$是半双线性泛函. 既然$\|\mu_{x,y}\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$，那么△上的每个有界Borel函数$f$所作

出的

(6) $$\int_{\triangle} f d\mu_{x,y}$$

应当是H上的有界半双线性泛函。按照定理3.1.8，这时f将对应于一个算子$\Phi(f)\in\mathscr{B}(H)$，使得

(7) $$(\Phi(f)x, y)=\int_{\triangle} f d\mu_{x,y}.$$

将此式与（4）式相比较，即可得出

(8) $$\Phi(\hat{T})=T.$$

因此，Φ是从$C(\triangle)$到A上的映射$\hat{T}\mapsto T$的扩张。

如果f为实值函数，那么（5）式表明$(\Phi(f)x, y)$与$(\Phi(f)y, x)$是一对共轭复数。这意味着$\Phi(f)$是自伴算子。

下面来验证，Φ关于任意两个有界Borel函数f与g，有等式

(9) $$\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$$

成立。

我们知道，对于$S, T\in A$，恒有$(ST)^{\wedge}=\hat{S}\hat{T}$。因此（4）式蕴涵

(10) $$\int_{\triangle}\hat{S}\hat{T}d\mu_{x,y}=(STx, y)=\int_{\triangle}\hat{S}d\mu_{Tx,y}.$$

由于$\hat{A}=C(\triangle)$，比较上式的左、右两端，就得到

(11) $$\hat{T}d\mu_{x,y}=d\mu_{Tx,y}.$$

这时，如将（10）式积分中的$\hat{S}$换成f，等式仍然成立，因此

(12) $$\int_{\triangle} f\hat{T}d\mu_{x,y}=\int_{\triangle} f d\mu_{Tx,y}=(\Phi(f)Tx, y)$$

$$=(Tx, z)=\int_{\triangle}\hat{T}d\mu_{x,z},$$

其中$z=\Phi(f)^{*}y$。经过相同的推理还可以证明，(12)式中的$\hat{T}$换成任一有界Borel函数g以后，其中第一个积分与最后一个积

分应当相等，从而可得

$$(13)\qquad (\Phi(fg)x,\ y)=\int_{\triangle} fg\,d\mu_{x,y}=\int_{\triangle} g\,d\mu_{x,z}$$
$$=(\Phi(g)x,\ z)=(\Phi(f)\Phi(g)x,\ y).$$

于是（9）式得证.

现在来定义 E. 如果ω是$\triangle$的一个 Borel 子集，设f为ω的特征函数，置$E(\omega)=\Phi(f)$. 下面将验证$E(\omega)$具有定义3.2.1中规定的几个性质.

在（9）式中，若f与g分别是$\triangle$的两个 Borel 子集ω, ω'的特征函数时，就得到$E(\omega\cap\omega')=E(\omega)E(\omega')$. 其特款 $\omega=\omega'$表明每个$E(\omega)$都是射影算子. 又因为f取实值函数时，$\Phi(f)$是自伴算子,所以$E(\omega)$是自伴射影算子.如果ω与ω'有$\omega\cap\omega'=\varnothing$，特征函数的性质将保证$E(\omega\cup\omega')=E(\omega)+E(\omega')$. 显然$E(\varnothing)=\Phi(0)=0$. 至于$E(\triangle)=I$，则容易由（8）式得出. 当（7）式中的$f$取为$\triangle$的Borel子集$\omega$的特征函数时，将有

$$(14)\qquad (E(\omega)x,\ y)=\mu_{x,y}(\omega).$$

所以E确实是一个单位分解.

现在，只须将（14）式应用于（4）式，就看出上述的E满足（2）式.

倘若另有从其它途径得到的单位分解E也满足（2）式，那么，仍是根据有界线性泛函的 Riesz 表示定理，各个$E_{x,y}$应由（2）式唯一地确定. 这时，按照定义

$$(E(\omega)x,\ y)=E_{x,y}(\omega)$$

就得到各个射影算子$E(\omega)$的唯一性.

至此，(a) 这一部分已经证完.

求证(b)时，先假定ω是开集且有$E(\omega)=0$. 如果$T\in A$，又$\hat{T}$的支集在ω内，那么（1）式蕴涵$T=0$，因而$\hat{T}=0$. 既然$\hat{A}=C(\triangle)$，那么Урысон引理蕴涵$\omega=\varnothing$. 于是(b)得证.

为了求证(c)，选取$S\in\mathscr{B}(H)$后置$z=S^*y$. 对于任何$T\in A$以及任何Borel集$\omega\subset\triangle$，都有

(15) $$(STx,\ y)=(Tx,\ z)=\int_{\triangle}\hat{T}dE_{x,z};$$

(16) $$(TSx,\ y)=\int_{\triangle}\hat{T}dE_{Sx,y}\ ;$$

(17) $$(SE(\omega)x,\ y)=(E(\omega)x,\ z)=E_{x,z}(\omega);$$

(18) $$(E(\omega)Sx,\ y)=E_{Sx,y}(\omega).$$

如果对于每个$T\in A$都有$ST=TS$，那么（15）式与（16）式中的测度应当相等，因此$SE(\omega)=E(\omega)S$。类似的讨论可用以证明逆命题。 □

3.3.2 定理 如果$T\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，那么存在唯一的在$\sigma(T)$的Borel子集上的单位分解E，使得

(1) $$T=\int_{\sigma(T)}\lambda dE(\lambda).$$

此外，各个射影算子$E(\omega)$将与那些能和T交换的$S\in\mathscr{B}(H)$交换。

通常，上述的E特称为T的**谱分解**。

有时，将E定义在$\mathbf{C}$内的全体 Borel 集上要更方便一些，为此，若是$\omega\cap\sigma(T)=\varnothing$，则可置$E(\omega)=0$。

证 设A为$\mathscr{B}(H)$内含有I, T和T^*的最小闭子代数。由于T是正规算子，因而定理3.3.1的结论可以应用于A。根据定理2.3.5，如果对于每个$\lambda\in\sigma(T)$定义$\hat{T}(\lambda)=\lambda$，那么A的极大理想空间可以视为与$\sigma(T)$等同。E的存在则由定理3.3.1可知。

另一方面，如果有E存在使（1）式成立，定理3.2.4证明了

(2) $$p(T,\ T^*)=\int_{\sigma(T)}p(\lambda,\ \bar{\lambda})dE(\lambda),$$

其中p是任一复系数的二元多项式。由 Stone—Weierstrass 定理，这些多项式在$C(\sigma(T))$内稠密。所以射影算子$E(\omega)$由积分式(2)，因而也是由T唯一地决定，正如定理3.3.1中求证E的唯一性那样。

如果$ST=TS$，那么定理 3.1.16 已经指出将有 $ST^*=T^*S$。这就是说，S与A 的 每个元素都交换。然后，引用定理 3.3.1 的 (c)立即可得：每个Borel集$\omega\subset\sigma(T)$ 的$E(\omega)$与S 是交换的，即 $SE(\omega)=E(\omega)S$。 □

3.3.3 正规算子的符号运算

设E是正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$的谱分解，f是$\sigma(T)$ 上的一个有界Borel函数；如果用$f(T)$表示算子

$$(1)\qquad \psi(f)=\int_{\sigma(T)} f dE,$$

就将引出正规算子的符号运算。

例如，采用上述记号，定理 3.2.4 和定理3.3.1，定理3.3.2 的部分内容可以概述为：

映射$f\mapsto f(T)$是由$\sigma(T)$ 上的全体有界Borel函数构成的代数到$\mathscr{B}(H)$ 内的一个同态，它将函数 1 变换为I，又 将 $\sigma(T)$ 上的恒等函数变换为T；并且有

$$(2)\qquad \bar{f}(T)=f(T)^*,$$

以及

$$(3)\qquad \|f(T)\|\leqslant \operatorname{Sup}\{|f(\lambda)|:\lambda\in\sigma(T)\}.$$

如果$f\in C(\sigma(T))$，那么（3）式中的等号成立。

如果$f_n\to f$是一致逼近，那么$n\to\infty$时将有$\|f_n(T)-f(T)\|\to 0$。

如果$S\in\mathscr{B}(H)$能使 $ST=TS$，那么对于每个有界 Borel 函数f，都有$Sf(T)=f(T)S$。

由于$\sigma(T)$上的恒等函数可以用简单Borel 函数一致逼近，因而，依$\mathscr{B}(H)$的范数拓扑，T是射影算子$E(\omega)$ 的有限线性组合的极限。

下述定理的求证过程，可以看作是应用符号运算的一个实例。

3.3.4 定理　正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$ 的范数

$$\|T\|=\operatorname{Sup}\{|(Tx,x)|:x\in H,\ \|x\|\leqslant 1\}.$$

证 任取$\varepsilon>0$。显然只须求证在$x\in H$当中确有某些适合$\|x_0\|=1$的x_0能使

(1) $$|(Tx_0, x_0)|>\|T\|-\varepsilon$$

成立就行了。

由定理2.3.4可知

$$\|T\|=\|\hat{T}\|_\infty=\rho(T),$$

因此存在$\lambda_0\in\sigma(T)$使得$|\lambda_0|=\|T\|$. 构造集

$$\omega=\{\lambda:\lambda\in\sigma(T),\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}.$$

如果E是T的谱分解，那么定理3.3.1的(b)蕴涵$E(\omega)\neq 0$。因此存在$x_0\in H$，它的范数$\|x_0\|=1$，而且$E(\omega)x_0=x_0$。

再定义函数

$$f(\lambda)=\begin{cases}\lambda-\lambda_0, & \lambda\in\omega;\\ 0, & \lambda\in\sigma(T)\setminus\omega\end{cases}$$

这时有

$$f(T)=(T-\lambda_0 I)E(\omega).$$

所以

$$f(T)x_0=Tx_0-\lambda_0x_0.$$

由于全体$\lambda\in\sigma(T)$都满足条件$|f(\lambda)|<\varepsilon$，因而

$$|(Tx_0, x_0)-\lambda_0|=|(f(T)x_0, x_0)|\leqslant\|f(T)\|\leqslant\varepsilon.$$

既然$|\lambda_0|=\|T\|$，那么上式蕴涵（1）. □

3.3.5 定理 正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$是：

(a) 自伴算子，当且仅当$\sigma(T)$位于实轴上；

(b) 酉算子，当且仅当$\sigma(T)$在单位圆上.

证 和求证定理3.3.2时一样，设A为$\mathscr{B}(H)$内含有I，T和T^*的最小闭子代数。这时，在$\sigma(T)$上$\hat{T}(\lambda)=\lambda$，$(T^*)^\wedge(\lambda)=\bar{\lambda}$。因而

$T=T^*$，当且仅当在$\sigma(T)$上$\lambda=\bar{\lambda}$；

$TT^*=I$，当且仅当在$\sigma(T)$上$\lambda\bar{\lambda}=1$. □

3.3.6 不变子空间

定义 H的闭子空间M称为集$\Sigma\subset\mathscr{B}(H)$的一个**不变子空间**，

如果每个$T\in\Sigma$将M映入M内。

当Σ只含有一个算子T时，M可称为**算子T的不变子空间**。例如，T的每个特征空间都是T的不变子空间。

定理 正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$必定有非平凡的不变子空间。（"非平凡"的意思是：不是$\{0\}$；也不是H。）

证 和求证定理3.3.2时一样，设A为$\mathscr{B}(H)$内含有I，T和T^*的最小闭子代数，它是一个正规代数。再设E为A的极大理想空间Δ的Borel子集上的单位分解。如果Δ只有一个点，那么A将由I的纯量倍数组成，这时H的每个子空间都是A的不变子空间。如果$\Delta=\omega\cup\omega'$，其中ω与ω'是非空的不相交的Borel集。记$E(\omega)$与$E(\omega')$的值域分别为M与M'。由于每个$T\in A$都有$TE(\omega)=E(\omega)T$，因此，当$x\in M$时可以得到

$$Tx=TE(\omega)x=E(\omega)Tx.$$

这就证明了$Tx\in M$。对于M'将有类似的结论。所以M与M'都是A的不变子空间。 □

定理还可以做进一步的讨论，得出

$$M'=M^{\perp};\quad H=M\oplus M'.$$

因此，当Δ分解成有限个或可列个彼此不相交的Borel集时，H将相应地分解为A的彼此正交的不变子空间。

对于非正规算子来说，情况就不这么简单了。有一个悬而未决的问题是：考虑无穷维的可分的Hilbert空间时，是否每个（非正规）算子$T\in\mathscr{B}(H)$都能有一个非平凡的不变子空间？

3.4 正规算子的特征值

在这一节的前一部分将得出正规算子的特征值和它的谱分解之间的一个简单的关系（定理3.4.2）；中间暂时离开主题去讨论Banach空间上的紧算子（全连续算子）；最后则考虑正规紧算子的谱。讨论的过程中尽可能地应用了符号运算。

3.4.1 定理 设E是正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$的谱分解。如果f

$\in C(\sigma(T))$，$\omega_0=f^{-1}(0)$，那么

(1) $\qquad \mathscr{N}(f(T))=\mathscr{R}(E(\omega_0))$.

证 定义函数

$$g(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in\omega_0,\\ 0, & \lambda\in\sigma(T)\setminus\omega_0.\end{cases}$$

这时有$fg=0$，因此$f(T)g(T)=0$。由于$g(T)=E(\omega_0)$，故有

(2) $\qquad \mathscr{R}(E(\omega_0))\subset\mathscr{N}(f(T))$.

记$\tilde{\omega}=\sigma(T)\setminus\omega_0$，$\tilde{\omega}$将是彼此不相交的Borel集$\omega_n(n=1,2,\cdots)$的并集，每个$\omega_n$到紧集$\omega_0$的距离都是正数。定义

(3) $$f_n(\lambda)=\begin{cases}1/f(\lambda), & \lambda\in\omega_n,\\ 0, & \lambda\in\sigma(T)\setminus\omega_n.\end{cases}$$

各个f_n都是$\sigma(T)$上的有界Borel函数，而且

(4) $\qquad f_n(T)f(T)=E(\omega_n) \qquad (n=1,2,\cdots)$.

如果$f(T)x=0$，则有$E(\omega_n)x=0$。因此，由映射$\omega\mapsto E(\omega)x$的可列可加性（定理3.2.2）将能得到$E(\tilde{\omega})x=0$。既然$E(\tilde{\omega})+E(\omega_0)=I$，那么应当是$E(\omega_0)x=x$。这样，又证明了

(5) $\qquad \mathscr{N}(f(T))\subset\mathscr{R}(E(\omega_0))$.

合并（2）式与（5）式，即为（1）式。 □

3.4.2 定理 如果E是正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$的谱分解，$\lambda_0\in\sigma(T)$，$E_0=E(\{\lambda_0\})$，那么

(a) $\mathscr{N}(T-\lambda_0 I)=\mathscr{R}(E_0)$；

(b) λ_0是T的特征值，当且仅当$E_0\neq0$；

(c) $\sigma(T)$的每个孤立点都是T的特征值；

(d) 若是$\sigma(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$为可列集，则每个$x\in H$都有唯一的形如

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i$$

的展开式，其中的x_i使$Tx_i=\lambda_i x_i$，并且$i\neq j$时有$x_i\perp y_j$。

陈述(b)与(c)阐明了：T的点谱乃是T的全体特征值所作

成的集。

证 (a)是定理3.4.1的直接推论，只须取$f(\lambda)=\lambda-\lambda_0$.($b$)显然来自($a$)。如果$\lambda_0$是$\sigma(T)$的一个孤立点，那么$\{\lambda_0\}$是$\sigma(T)$的一个非空开子集，因此根据定理3.3.1的($b$)，应当有$E_0\neq 0$.这时由($b$)即可推出($c$)。

为了求证(d)，置$E_i=E(\{\lambda_i\})$，$i=1,2,\cdots$。在$\sigma(T)$的那些极限点λ_i，E_i可能是零算子，也可能不是．无论是哪种情况，射影算子E_i的值域都是彼此正交的．映射$\omega\mapsto E(\omega)x$的可列可加性（定理3.2.2）表明

$$\sum_{i=1}^{\infty}E_ix=E(\sigma(T))x=x \qquad (x\in H).$$

级数依H的范数收敛。现在，只须设$x_i=E_ix$，就得到我们所期待的x的表示式．由各个x_i彼此正交可以验证表示式是唯一的。至于$Tx_i=\lambda_ix_i$，则是(a)的推论． □

3.4.3 紧算子

定义 设X与Y均为Banach空间，U是X内的开单位球；$T\in\mathscr{B}(X,Y)$称为**紧算子**，如果$T(U)$的闭包是Y内的紧集。

在很多著作中，紧算子又称为**全连续算子**。

从定义容易得知：由于Banach空间Y是完备空间，Y内的那些其闭包为紧集的子集必定是全有界集，因此，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$是紧算子，当且仅当$T(U)$是全有界集。还有，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$是紧算子，当且仅当X内的每个有界序列$\{x_n\}$均能包含一个子序列$\{x_{n_i}\}$，它的象集$\{Tx_{n_i}\}$在Y内收敛于一个点。

定理 设X与Y均为Banach空间。

(a) 如果$T\in\mathscr{B}(X,Y)$且$\dim\mathscr{R}(T)<\infty$，那么$T$是紧算子．

(b) 如果$T\in\mathscr{B}(X,Y)$是紧算子且$\mathscr{R}(T)$为闭集，那么$\dim\mathscr{R}(T)<\infty$。

(c) $\mathscr{B}(X,Y)$的全体紧算子依其范数拓扑构成一个闭子空间。

(*d*) 如果 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是紧算子，又 $\lambda\neq 0$，那么 $\dim\mathscr{N}(T-\lambda I)<\infty$。

(*e*) 如果 $\dim X=\infty$，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是紧算子，那么 $0\in\sigma(T)$。

(*f*) 如果 $S, T\in\mathscr{B}(X)$，其中 T 是紧算子，那么 ST 与 TS 均为紧算子。

证 (*a*) 是因为，有限维 Banach 空间的任一有界闭子集都是紧集。

如果 $\mathscr{R}(T)$ 是闭集，则由 Y 的完备性可以推知 $\mathscr{R}(T)$ 完备。因此 T 是一个从 X 到 $\mathscr{R}(T)$ 上的开映射。既然 T 是紧算子，那么 $\mathscr{R}(T)$ 将是局部紧空间，所以它是有限维的。于是 (*b*) 得证。

我们先来求证 (*d*)。置 $X_0=\mathscr{N}(T-\lambda I)$。将 T 限制在 X_0 之后它仍是一个紧算子，其值域为 X_0。可见 (*d*) 是 (*b*) 的推论。顺便也可以证明 (*e*)。因为，假如，$0\notin\sigma(T)$，将有 $\mathscr{R}(T)=X$，这与题设 $\dim X=\infty$ 抵触。

(*f*) 显见，因为有界线性算子总是将有界集映成有界集。

最后证明 (*c*)。

任取紧算子 $S, T\in\mathscr{B}(X, Y)$，则 $S+T$ 也是紧算子；这是因为 Y 内的任二紧集的并集仍是紧集。由此得知 $\mathscr{B}(X, Y)$ 内的全体紧算子的集 Σ 是 $\mathscr{B}(X, Y)$ 的一个子空间。以下求证 Σ 是闭集。设 $T\in\mathscr{B}(X, Y)$ 在 Σ 的闭包之内，选取 $r>0$，再设 U 是 X 内的开单位球。这时必有 $S\in\Sigma$ 满足 $\|S-T\|<r$。既然 $S(U)$ 是全有界集，在 U 内应当有这样一组点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得 $S(U)$ 被中心在 Sx_i 的半径等于 r 的 n 个球所复盖。由于每个 $x\in U$ 都有 $\|Sx-Tx\|<r$，因而得知 $T(U)$ 被 n 个以 Tx_i 为中心，半径等于 $3r$ 的球所复盖。这意味着 $T(U)$ 是全有界集，所以 $T\in\Sigma$。 □

3.4.4 紧算子的谱

定理 设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是紧算子，那么

(*a*) 任何复数 $\lambda\neq 0$ 或者是 T 的正则值或者是 T 的特征值，二者必居其一；当 $\lambda\neq 0$ 是 T 的特征值时，对应的特征向量空间是

有限维的；

(b) $\sigma(T)$ 或者是有限集或者是仅以零为其聚点的可列集.

证 (a)所谓λ是T的正则值，意味着$(T-\lambda I)^{-1}$是有界算子. 如果$\lambda\neq 0$不是T的正则值，那么$(T-\lambda I)x=0$必有非零解，于是λ是T的一个特征值. 设T对应于λ的特征向量空间是L. 在L中任取有界集A，因对任一$x\in L$有$Tx=\lambda x$，故$T(A)=\lambda A$. 既然T是紧算子，那么$T(A)$是列紧集，因而A也是列紧集. L的任一有界子集都是列紧集这一事实表明L是有限维的.

(b) 设$\sigma(T)$不是有限集，而且$\sigma(T)$有不等于零的聚点λ_0，在$\sigma(T)$内取可列个彼此不同的点$\lambda_n(n=1,2,\cdots)$，使$\lambda_n\to\lambda_0$. 因$\lambda_0\neq 0$，无妨设所有的$\lambda_n\neq 0$. 由(a)，各个λ_n都是T的特征值，于是可取对应的特征元x_n. 设L_n是x_1，x_2，…，x_n张成的子空间. 易知各个L_n都是闭子空间，且$L_n\subset L_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 注意到$\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$中的任意有限个元都是线性无关的，因此对于每个n都有$L_n\neq L_{n+1}$，也就是说L_n是L_{n+1}的真子空间. 这样，我们就能取$y_{n+1}\in L_{n+1}$使得

$$y_{n+1}\overline{\in}L_n,\qquad \|y_{n+1}\|=1;$$

$$\rho_n=\inf_{y\in L_n}\|y_{n+1}-y\|\geq\frac{1}{2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

设$y_n=\alpha_1^{(n)}x_1+\alpha_2^{(n)}x_2+\cdots+\alpha_n^{(n)}x_n$，则$Ty_n=\alpha_1^{(n)}\lambda_1x_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}\lambda_nx_n\in L_n$，于是

$$y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ty_n=\alpha_1^{(n)}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)x_1+\cdots$$

$$+\alpha_{n-1}^{(n)}\left(1-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)x_{n-1}\in L_{n-1}.$$

又当$m<n$时，$Ty_m\in L_m\subset L_{n-1}$，因此

$$y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ty_n+\frac{1}{\lambda_m}Ty_m\in L_{n-1}.$$

从而推知$m<n$时必定有

(1) $$\left\|\frac{1}{\lambda_n}Ty_n-\frac{1}{\lambda_m}Ty_m\right\|$$

$$= \left\| y_n - \left[\left(y_n - \frac{1}{\lambda_n} T y_n \right) + \frac{1}{\lambda_m} T y_m \right] \right\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

另一方面，由于 $\{\lambda_n\} \to \lambda_0 \neq 0$，因而$\left\{\frac{1}{\lambda_n} y_n\right\}$是$X$内的有界集，它应当有一个子集$\left\{\frac{1}{\lambda_{n_i}} y_{n_i}\right\}$经过紧算子 T 得到的象集$\left\{\frac{1}{\lambda_{n_i}} T y_{n_i}\right\}$是列紧集。但是，从上面得到的（1）式来看，这是不可能的。所以$\sigma(T)$不存在非零的聚点。 □

3.4.5 定理 正规算子$T \in \mathscr{B}(H)$ 是紧算子，当且仅当它满足以下两个条件：

(a) 如果$\sigma(T)$有聚点，其唯一的可能是0；

(b) 如果$\lambda \neq 0$，那么$\dim \mathscr{N}(T - \lambda I) < \infty$。

证 必要性即定理3.4.4的(b)和定理3.4.3的(d)。

为了求证充分性，设(a) 与(b) 成立。设$\{\lambda_i\}$ 是$\sigma(T)$ 的可列个非零点，且$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$；并且定义函数

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda_1, & \lambda = \lambda_1, \\ \lambda_2, & \lambda = \lambda_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n, & \lambda = \lambda_n, \\ 0, & \lambda \in \sigma(T) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}. \end{cases}$$

如果象在定理3.4.2中那样，记$E_i = E(\{\lambda_i\})$，将能得到

$$f_n(T) = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n.$$

由于$\dim \mathscr{R}(E_i) = \dim \mathscr{N}(T - \lambda_i I) < \infty$，因而各个$f_n(T)$都是紧算子。按照定义，任何$\lambda \in \sigma(T)$都有$|\lambda - f_n(\lambda)| \leqslant |\lambda_n|$，于是我们将推知

$$n \to \infty 时\ \| T - f_n(T) \| \leqslant |\lambda_n| \to 0.$$

现在，引用定理3.4.3的(c)就可以肯定T是紧算子。 □

3.4.6定理 如果正规算子 $T \in \mathscr{B}(H)$ 又是紧算子，那么

(a) T有一个特征值λ，其$|\lambda| = \|T\|$；

(*b*) 如果$f\in C(\sigma(T))$且$f(0)=0$，则$f(T)$ 是紧算子.

证 如果T是正规算子，那么定理2.3.4表明，存在$\lambda\in\sigma(T)$其$|\lambda|=\|T\|$．若是$\|T\|>0$,根据定理3.4.5，这个λ将是$\sigma(T)$的孤立点，因而是T的一个特征值(定理3.4.2)；若是$\|T\|=0$，则（a)显而易见.

由于$\sigma(T)$是$\mathbf{C}$内的一个至多为可列集的紧集，它的补集应当是连通集．于是，解析函数论中的Mergelyan定理将保证存在这样的多项式p_n，它们在$\sigma(T)$上一致收敛于f，且$p_n(0)=0$。因而算子$p_n(T)$依$\mathscr{B}(H)$的范数收敛于$f(T)$。既然$p_n(0)=0$，由§3.4.3定理的(f)可知每个$p_n(T)$都是紧算子，再引用该定理的(c) 即可证明$f(T)$也是紧算子. □

3.5 正算子及其平方根

3.5.1 定义

如果$T\in\mathscr{B}(H)$对于一切$x\in H$都有$(Tx, x)\geqslant 0$，T将称为**正算子**，并可简单地记作$T\geqslant 0$.

如果有$S\in\mathscr{B}(H)$使正算子$T\in\mathscr{B}(H)$满足条件$T=S^2$，S将称为T的一个**平方根**.

当T的平方根$S\geqslant 0$时，S特称为T的一个**正平方根**.

3.5.2定理 $T\in\mathscr{B}(H)$是正算子的充分必要条件是：

(a) $T=T^*$；以及

(b) $\sigma(T)\subset[\sigma, \infty)$

同时成立.

这个定理表明，正算子是一类自伴算子，它们的谱位于含有原点的正实轴上．回顾一下§2.4.6最后陈述的定义中给出的有对合的Banach代数中的元$x\geqslant 0$的条件，就能看出和现在要证明的定理内容完全一致.

证 先证必要性.

$(Tx, x)\geqslant 0$意味着(Tx, x)是一个实数．因此，对于一切

$x\in H$都有

$$(x, T^*x)=(Tx, x)=(x, Tx),$$

根据定理3.1.7的推论，应当有$T=T^*$。再由定理3.3.5可知，$\sigma(T)$在实轴上。

任取$\lambda>0$，这时

$$\lambda\|x\|^2=\lambda(x, x)\leqslant((T+\lambda I)x, x)\leqslant\|(T+\lambda I)x\|\,\|x\|,$$

亦即$\|(T+\lambda I)x\|\geqslant\lambda\|x\|$。这说明$T+\lambda I$在$\mathscr{B}(H)$内可逆，因此$-\lambda\notin\sigma(T)$。从而最终证得$\sigma(T)\subset[0, \infty)$。

为了求证充分性，注意自伴算子也是正规算子。根据定理3.3.2，T有谱分解E，并能作出

$$(Tx, x)=\int_{\sigma(T)}\lambda dE_{x,x}(\lambda)\qquad(x\in H).$$

由于各个$E_{x,x}$都是正测度，而在$\sigma(T)$上又是$\lambda\geqslant 0$，所以得到$(Tx, x)\geqslant 0$。 □

3.5.3 定理 每个正算子$T\in\mathscr{B}(H)$都有唯一的正平方根$S\in\mathscr{B}(H)$。而且，当T可逆时，S也可逆。

证 设A为$\mathscr{B}(H)$的任一含有I，T的闭正规子代数，$\triangle$为A的极大理想空间。根据定理2.3.4，将有$\hat{A}=C(\triangle)$；正算子T应当满足定理3.5.2中的条件，又因为$\sigma(T)=\hat{T}(\triangle)$，所以我们得到$\hat{T}\geqslant 0$。由于每个非负连续函数都有唯一的非负连续平方根，因此有$\hat{S}\geqslant 0$使$\hat{S}^2=\hat{T}$。应用定理3.3.1，相应地有唯一的$S\in A$使$S^2=T$，再由定理3.5.2可知$\hat{S}\geqslant 0$等价于$S\geqslant 0$。

特别是，即使A_0为上述代数A当中最小的一个，那么仍应存在$S_0\in A_0$，它满足条件$S_0^2=T$以及$S_0\geqslant 0$。如果$S\in\mathscr{B}(H)$是T的任一平方根，设A是$\mathscr{B}(H)$内含有I和S的最小闭子代数，由于$T=S^2$，故$T\in A$。从而得到$A_0\subset A$以及$S_0\in A$。这时，由上面一段的讨论可知$S=S_0$。

最后，设T可逆。注意到由S与T交换可以推知S与T^{-1}交换，就能得出$S^{-1}=T^{-1}S$。 □

3.5.4 定理 如果$T\in\mathscr{B}(H)$，那么T^*T是正算子；它的

唯一的正平方根 $P\in\mathscr{B}(H)$ 能使任何 $x\in H$ 都满足

$$\|Px\|=\|Tx\|.$$

证 由于

(1) $(T^*Tx, x)=(Tx, Tx)=\|Tx\|\geqslant 0 \quad (x\in H)$,

按照定义，即$T^*T\geqslant 0$.

根据定理3.5.3，T^*T有唯一的正平方根 $P\in\mathscr{B}(H)$，它应当是自伴算子，即$P=P^*$；因此可以得到

(2) $(P^2x, x)=(Px, Px)=\|Px\| \quad (x\in H)$.

比较说(1)式与(2)式，由定理3.1.7及其推论可知，对于任何$x\in H$来说，$\|Px\|=\|Tx\|$当且仅当$P^2=T^*T$. □

众所周知，每个复数λ能分解因子为$\lambda=\alpha|\lambda|$，其中$|\alpha|=1$。这件事启发我们尝试着将 $T\in\mathscr{B}(H)$ 分解因子为$T=UP$，其中U是酉算子，而 $P\geqslant 0$。当这个想法能够实现时，UP 将称为T的**极分解**.

注意U作为酉算子，也是一个等距映射。因此定理3.5.4表明，P由T唯一地确定。

3.5.5 定理

(*a*) 如果$T\in\mathscr{B}(H)$ 是可逆算子，则 T 有唯一的极分解 $T=UP$.

(*b*) 如果 $T\in\mathscr{B}(H)$ 是正规算子，则T 有一个极分解 $T=UP$，其中的U与P彼此交换，也与T交换。

证 (*a*) 如果T是可逆算子，那么T^*与T^*T也都可逆，再由定理3.5.3得知T^*T的正平方根 $P\in\mathscr{B}(H)$ 也是可逆算子。置$U=TP^{-1}$，则U可逆，而且

$$U^*U=P^{-1}T^*TP^{-1}=P^{-1}P^2P^{-1}=I,$$

因此U是酉算子、由于P可逆，显然TP^{-1}是U所能作出的唯一的选择。

(*b*) 定义函数

$$p(\lambda)=|\lambda|;$$

以及

$$u(\lambda)=\begin{cases}\lambda/|\lambda|, & \lambda\neq 0,\\ 1, & \lambda=0.\end{cases}$$

它们都是$\sigma(T)$上的有界Borel函数。

现在，设$P=p(T)$，$U=u(T)$。因为$p\geqslant 0$，由定理3.5.2可知$P\geqslant 0$。又因为$u\bar{u}=1$，所以$UU^*=U^*U=I$。这就是说，所得到的U是酉算子。最后，由于$\lambda=u(\lambda)p(\lambda)$，应用符号运算就有$T=UP$。 □

3.5.6 评注

并非每个$T\in\mathscr{B}(H)$都能有极分解，本章习题18给出了一个反例。然而，如果P是T^*T的正平方根，由于定理3.5.4已证$\|Px\|=\|Tx\|$，因此可以定义

$$VPx=Tx,$$

V是$\mathscr{R}(P)$到$\mathscr{R}(T)$上的一个线性等距，它还可以连续扩张成为$\mathscr{R}(P)$的闭包到$\mathscr{R}(T)$的闭包上的一个线性等距。如果$\mathscr{R}(P)^\perp$到$\mathscr{R}(T)^\perp$上也有一个线性等距，那么V将能扩张成为H上的一个酉算子，这时T有一个极分解。这件事在$\dim H<\infty$的条件下一定能实现，因为这时$\mathscr{R}(P)$与$\mathscr{R}(T)$有相同的余维数。

倘若上述V被扩张成为$\mathscr{B}(H)$的一个元时，是借助于对一切$y\in\mathscr{R}(P)^\perp$定义$Vy=0$，那么V将称为**部分等距算子**。

这样，我们就看到，虽然不是每个$T\in\mathscr{B}(H)$都能有极分解；但是都能够有因子分解

$$T=VP,$$

其中P是正算子，V是部分等距算子。

结合定理3.1.16，应用极分解可以得出下面的有关正规算子的**相似性**的一个有趣的结果。

3.5.7 定理 设$M, N, T\in\mathscr{B}(H)$，其中M与N都是正规算子，T是可逆算子，又有

(1) $M=TNT^{-1}$,

如果$T=UP$是T的极分解，那么

(2) $M=UNU^{-1}$.

满足(1)式的两个算子M与N通常称为**相似的**。如果U是酉算子，而(2)式又能成立，M与N将称**酉等价的**。因此，定理说的是：相似的正规算子也是酉等价的。

证 注意到(1)式实际上是$MT=TN$。因此，根据定理3.1.16可以得到$M^*T=TN^*$。随之将有

$$T^*M=(M^*T)^*=(TN^*)^*=NT^*,$$

又因为$P^2=T^*T$，所以

$$NP^2=NT^*T=T^*MT=T^*TN=P^2N。$$

这时，由§3.3.3正规算子的符号运算可知，对于每个$f\in C(\sigma(P^2))$，N与$f(P^2)$交换。但因$P\geqslant 0$，故$\sigma(P^2)\subset[0,\infty)$。如果在$\sigma(P^2)$上的$f(\lambda)=\lambda^{1/2}\geqslant 0$，那么将由此得出$NP=PN$。现在，利用题设的条件(1)就有

$$M=(UP)N(UP)^{-1}=U(PNP^{-1})U^{-1}=UNU^{-1}. \qquad \square$$

3.6 $\mathscr{B}(H)$的可逆算子群

3.6.1 定理 $\mathscr{B}(H)$的可逆算子群G是连通的，并且每个$T\in G$都可以表示为两个指数的乘积。

证 我们先求证定理的后一部分。

根据定理3.5.5的(*a*)，$T\in G$有唯一的极分解$T=UP$，其中U是酉算子，P是可逆正算子。再由定理3.5.2可知$\sigma(P)\subset(0,\infty)$。因此，定义在$\sigma(P)$上的$\log\lambda$是连续实函数。应用符号运算，有一个自伴算子$S\in\mathscr{B}(H)$，具体地说就是

$$S=\int_{\sigma(P)}\log\lambda dE(\lambda),$$

使得$P=\exp(S)$。至于酉算子U，由于$\sigma(U)$在单位圆上，因此在$\sigma(U)$上有一个实值有界Borel函数f（这个f不一定是连续函数）满足

$$\exp\{if(\lambda)\}=\lambda \qquad (\lambda\in\sigma(U))。$$

置$Q=f(U)$。这样的$Q\in\mathscr{B}(H)$是自伴算子，而且$U=\exp(iQ)$。

现在就得到了

$$T=UP=\exp(iQ)\exp(S).$$

为了验明G的连通性，只须在$0\leqslant r\leqslant 1$上定义

$$T_r=\exp(irQ)\exp(rS).$$

注意到映射$r\mapsto T_r$是单位区间$[0,1]$到G内的一个连续映射，而且$T_0=I$，$T_1=T$；因此G是连通的。 □

现在，很自然地会提出一个问题：能否使每个$T\in G$仅仅是一个指数，而无须表示为两个指数的乘积？或者说，任何两个指数作出的乘积实际上只是一个指数。如果$\dim H<\infty$，答案是肯定的，因为这是定理1.5.8的推论。但是在一般情况下却做不到。下面的定理将给出一个反例。

3.6.2 定理 设D是$\boldsymbol{C}$内的一个有界开集，由它引出的另一个集

(1) $\Omega=\{\alpha\in\boldsymbol{C}:\alpha^2\in D\}$

是连通集，而且0不在D的闭包之内。（区域D的最简单的例子是以原点为中心的圆环） 再设$\mathscr{H}$是由D内的那些全纯函数f构成的空间，它们都满足条件

(2) $$\int_D |f|^2 dm_2<\infty,$$

（其中m_2是平面上的Lebesgue测度）；且有内积

(3) $$(f,g)=\int_D f\bar{g}\,dm_2 \qquad (f,g\in\mathscr{H}),$$

那么，$\mathscr{H}$是一个Hilbert空间；由公式

(4) $(Mf)(z)=zf(z) \qquad (f\in\mathscr{H},\ z\in D)$

定义的乘法算子是可逆算子；但是M在$\mathscr{B}(\mathscr{H})$内没有平方根.

由于任何指数都应当具有一切阶的根，因此定理揭示$\mathscr{B}(H)$内有这样的算子，它不可能是一个指数。

证 显然，（3）所定义的内积使$\mathscr{H}$成为一个酉空间，我们来求证$\mathscr{H}$的完备性。设K是D的一个紧子集，它到D的余集的距离是δ。如果$z\in K$，设$\triangle$是中心在z，半径为δ的开的单位

圆盘；既然f是全纯函数，它可以展开为

$$f(\zeta)=\sum a_n(\zeta-z)^n \text{于} \zeta\in\triangle.$$

经过简单的计算就能得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}|a_n|^2\delta^{2n+2}=\frac{1}{\pi}\int_{\triangle}|f|^2dm_2. \tag{5}$$

由于$f(z)=a_0$，因而

$$|f(z)|\leqslant\pi^{-1/2}\delta^{-1}\|f\| \qquad (z\in K,\ f\in\mathscr{H}), \tag{6}$$

其中$\|f\|=(f,f)^{1/2}$。这表明$\mathscr{H}$内的任何Cauchy序列在D的紧子集上是一致收敛的。由此易知$\mathscr{H}$是完备空间，也就是Hilbert空间。

由于D有界，故$M\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$；又因为$1/z$在$D$内有界，所以$M^{-1}\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$。

以下将求证M在$\mathscr{B}(\mathscr{H})$内没有平方根。为此先假定有某个$Q\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$使$M=Q^2$，然后引出矛盾。

选定$\alpha\in\Omega$，置$\lambda=\alpha^2$。这时$\lambda\in D$。定义

$$M_\lambda=M-\lambda I;\quad S=Q-\alpha I;\quad T=Q+\alpha I, \tag{7}$$

这几个算子之间的关系是

$$ST=M_\lambda=TS. \tag{8}$$

由于所涉及的是全纯函数，公式

$$(M_\lambda g)(z)=(z-\lambda)g(z) \qquad (z\in D,\ g\in\mathscr{H}) \tag{9}$$

表明M_λ是一对一的，它的值域$\mathscr{R}(M_\lambda)$中的函数$f\in\mathscr{H}$全都满足条件$f(\lambda)=0$。因此，由（9）式还可以看出$\mathscr{R}(M_\lambda)$是$\mathscr{H}$的一个余维数等于1的闭子空间。

既然M_λ是一对一的，那么从（8）式的第一个方程可知S是一对一的；而从（8）式的第二个方程又可知T是一对一的。由于$\mathscr{R}(M_\lambda)\neq\mathscr{H}$，因而$M_\lambda$在$\mathscr{B}(\mathscr{H})$内不可逆。于是，$S$与$T$当中至少有一个不可逆。设$S$为不可逆。这时，由于$M_\lambda=ST$，$\mathscr{R}(M_\lambda)\subset\mathscr{R}(S)$，因而$\mathscr{R}(S)$将是$\mathscr{R}(M_\lambda)$或$\mathscr{H}$。如果是后一种情况，开映射定理蕴涵$S$为可逆，这将与前面的假设抵触，所以应当是$\mathscr{R}(S)=\mathscr{R}(M_\lambda)$；也就是说，$S$是从$\mathscr{H}$到$\mathscr{R}(M_\lambda)$上

的一对一映射。但是方程$M_\lambda=ST$又表明S将$\mathscr{R}(T)$映射到$\mathscr{R}(M_\lambda)$上。因此$\mathscr{R}(T)=\mathscr{H}$。再应用开映射定理即可得到$T^{-1}\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$。至此，我们证明了：若$S$为不可逆，则$T$可逆。如果当初设$T$不可逆，那么将证得$S$可逆。

既然算子S，T当中有一个而且只有一个在$\mathscr{B}(\mathscr{H})$内可逆，那么，相应地α与$-\alpha$这两个数当中必定有一个而且只有一个属于$\sigma(Q)$。因此，Ω是两个不相交的全等集

$$\sigma(Q)\cap\Omega,\ \{-\sigma(Q)\}\cap\Omega$$

的并集，它们相对于Ω来说都是闭集，因为$\sigma(Q)$是紧集。现在我们看到了，假如有$Q\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$使$M=Q^2$，则$\Omega$不是连通集。为了不与题设条件相抵触，结论只能是：$M$在$\mathscr{B}(\mathscr{H})$内没有平方根。 □

3.7 C^*-代数的特征

每个$\mathscr{B}(H)$都是一个C^*-代数，这一事实前面已经充分地加以利用。作为本章的结束，这一节的最后将要建立的Гельфанд-Наймарк 定理可以看成是一个逆定理，因为它肯定了每个C^*-代数（无论交换与否）都是某个$\mathscr{B}(H)$的一个闭子代数的等距$*$-同构。证明的过程将从某些正泛函的存在开始。

3.7.1 定理 如果A是C^*-代数，$z\in A$，那么，在A上存在一个正泛函F，它满足以下条件

(1) $F(e)=1$；$F(zz^*)=\|z\|^2$。

证 我们将A内全体自伴元构成的实向量空间记作A_r，它相当于A的"实部"；再设P为所有$x\in A_r$中能使$\sigma(x)\subset[0,\infty)$的$x$组成的集。按照求证定理2.4.7之前约定的记号，$x\in P$当且仅当$x\geqslant 0$。而由该定理可知$P$是一个锥，这就是说，当$x$, $y\in P$，c是一个正的纯量时，必定有$cx\in P$，$x+y\in P$。此外，P还包含了一切由$x\in A$作出的形如xx^*的元。

为了求证定理，只须设法找到A_r上的一个实线性泛函f，

它满足（1）式并且对于任何$x\in P$都有

(2) $f(x)\geqslant 0$.

因为一旦有了这样的f，我们就能在A上定义$F(x)=f(u)+if(v)$，其中$x=u+iv$；$u\in A_r$，$v\in A_r$。这个定义蕴涵$F(ix)=iF(x)$，所以F是复线性的；再注意到（2）式，就能看出F恰好是定理结论中所要求的正泛函。

设M_0为A_r的子空间，它由e与zz^*张成，在M_0上定义f_0为

(3) $f_0(\alpha e+\beta zz^*)=\alpha+\beta\|zz^*\|$ $(\alpha,\beta\in \boldsymbol{R})$.

显然，在M_0上这样定义f_0是合理的，即使e与zz^*线性相关。由定理2.4.7的(a)可知$\|zz^*\|\in\sigma(zz^*)$。因此$\alpha+\beta\|zz^*\|$在$\sigma(\alpha e+\beta zz^*)$之内。换句话说，如果$x\in M_0$，则$f_0(x)\in\sigma(x)$；因此，对于每个$x\in P\cap M_0$都有$f_0(x)\geqslant 0$，$f_0$还满足（1）所列举的两个条件。

假定f_0已经在A_r的一个子空间M_1上扩张成为实线性泛函f_1，并且任何$x\in P\cap M_1$都有$f_1(x)\geqslant 0$；然后取$y\in A_r$，$y\overline{\in}M_1$，置

(4) $E'=M_1\cap(y-P)$，$E''=M_1\cap(y+P)$.

如果$x'\in E'$，$x''\in E''$，那么$y-x'\in P$，$x''-y\in P$；因而它们的和$x''-x'\in P$。于是$f_1(x')\leqslant f_1(x'')$。这时，可以取一个实数$c$，使之

(5) $f_1(x')\leqslant c\leqslant f_1(x'')$.

再定义

(6) $f_2(x+\alpha y)=f_1(x)+\alpha c$

$$(x\in M_1,\ y\in A_r,\ y\overline{\in}M_1,\ \alpha\in \boldsymbol{R}),$$

其中形如$x+\alpha y$的元所构成的子空间我们将记作M_2。如果$x+y\in P$，那么$-x\in E'$，$f_1(-x)\leqslant c$，$f_1(x)\geqslant -c$；因此$f_2(x+y)\geqslant 0$。如果$x-y\in P$，那么$x\in E''$，$f_1(x)\geqslant c$；于是$f_2(x-y)\geqslant c-c=0$。将上述两种情况综合起来就得到：在$P\cap M_2$上恒有$f_2\geqslant 0$。于是，f_1又被扩张成为f_2。

现在，借助超限归纳法即可完成证明，因为上述扩张过程连续进行下去，最终将能得到所期待的定义在整个A_r上的那个实

线性泛函 f. □

从证明的过程可以看出，定理所肯定存在的正泛函 F 与事先指定的 $z \in A$ 有关，F 甚至应当附以下标而记作 F_z，不过我们往往略去不写。今后用到这个定理时请读者记住这件事。

3.7.2 定理 如果 A 是 C^*-代数，$u \in A$，$u \neq 0$，那么，存在一个Hilbert空间 H_u；还存在一个从 A 到 $\mathscr{B}(H_u)$ 的同态 T_u，它满足条件 $T_u(e)=I$；

(1) $$T_u(x^*)=T_u(x)^* \quad (x \in A);$$

(2) $$\| T_u(x) \| \leqslant \| x \| \quad (x \in A);$$

以及 $$\| T_u(u) \| = \| u \|.$$

证 我们先来求证 H_u 的存在。因为 $u \in A$ 是给定的，所以在证明的叙述中应当用它做下标时也可省略。

根据定理3.7.1，可以取 A 上的一个正泛函 F，它满足条件

(3) $$F(e)=1; \quad F(u^*u)= \| u \|^2.$$

再定义 A 的一个子集

(4) $$Y=\{y \in A; \ 任何 x \in A 均使 F(xy)=0\}.$$

由于 F 连续（定理2.5.3），因此 Y 是 A 的一个闭子空间。将 Y 的陪集，即 A/Y 中的元记作 x'：

(5) $$x'=x+Y \quad (x \in A).$$

然后验证

(6) $$(a', b')=F(b^*a)$$

是定义在 A/Y 上的一个内积。

首先指出由（6）式给出的 (a', b') 的定义与 a 和 b 的表示式的选取无关。为此只须证明，如果 a 和 b 至少有一个在 Y 内时，就有 $F(b^*a)=0$。

如果 $a \in Y$，由（4）式将直接得到 $F(b^*a)=0$。如果 $b \in Y$，那么由定理2.5.2的（a），并且再一次应用（4）式，也可以得到

(7) $$F(b^*a)=F(a^*b)=0.$$

因此 (a', b') 的定义是合理的，它对 a' 来说是线性的，而对

b'来说则是共轭线性的。由于F是正泛函，故有

(8) $$(a', a') = F(a^*a) \geqslant 0;$$

如果 $(a', a') = 0$，那么$F(a^*a) = 0$，根据定理 2.5.2 的(b)，对于每个$x \in A$，都有$F(xa) = 0$，所以$a \in Y$，亦即$a' = 0$.

然后不难验明 A/Y 是一个内积空间，并且可以赋予范数 $\|a'\| = F(a^*a)^{1/2}$；再将这个内积空间完备化，使之成为Hilbert 空间，记作H；按照我们当初略去下标u的约定，其实就是H_u。

以下将求证A到$\mathscr{B}(H_u)$ 的同态T_u的存在。

我们在A/Y上定义算子$T(x)$为

(9) $$T(x)a' = (xa)'.$$

不难看出，上述定义与a的表示式的选取无关；因为，由（4）很容易验明Y是A内的一个**左理想**，所以$y \in Y$时，（4）式蕴涵$xy \in Y$。显然映射$x \mapsto T(x)$是线性的，并且

(10) $$T(x_1)T(x_2) = T(x_1x_2) \qquad (x_1, x_2 \in A);$$

特别是，定义（9）表明$T(e)$ 是 A/Y 上的恒等算子。现在我们看看能否有

(11) $$\|T(x)\| \leqslant \|x\| \qquad (x \in A)$$

成立？此事一旦得证，利用算子$T(x)$ 的一致连续性就能将T 扩张为H上的有界线性算子。注意到

(12) $$\|T(x)a'\|^2 = ((xa)', (xa)') = F(a^*x^*xa),$$

对于固定的$a \in A$，定义$G(x) = F(a^*xa)$。这时，G是 A 上的一个正泛函，因此由定理2.5.2的(d)，有

(13) $$G(x^*x) \leqslant G(e)\|x\|^2.$$

利用上式即可推出

(14) $$\|T(x)a'\|^2 = G(x^*x) \leqslant F(a^*a)\|x\|^2 = \|a'\|^2\|x\|^2,$$

从而证明了(11)。

接下来，计算

$$\begin{aligned}(T(x^*)a', b') &= ((x^*a)', b') = F(b^*x^*a)\\ &= F((xb)^*a) = (a', (xb)')\end{aligned}$$

$$=(a', T(x)b')=(T(x)^*a', b'),$$

所得结果表明，任何$a'\in A/Y$都有$T(x)^*a'=T(x^*)a'$。既然A/Y在H内稠密，那么（1）已得证。

最后，由于$\|e'\|^2=F(e^*e)=F(e)=1$，从（3）的第二个等式和（12）可以推知

$$(15)\qquad \|u\|^2=F(u^*u)=\|T(u)e'\|^2\leqslant\|T(u)\|^2.$$

注意到（11）中有相反的不等式，因此$\|T(u)\|=\|u\|^2$。 □

3.7.3 定理 如果A是C^*-代数，那么，存在一个从A到$\mathscr{B}(H)$的一个闭子代数上的等距*-同构，其中的H是一个适当选取的Hilbert空间。

证 设H是用定理3.7.2中那样的Hilbert空间H_u，让u历遍A时作出的"直接和"。我们来精确地描述H：设$\pi_u(v)$是由各个空间H_u作成的笛卡儿积中的一个元v的H_u-坐标。于是，根据定义，$v\in H$当且仅当

$$(1)\qquad \sum_u\|\pi_u(v)\|^2<\infty,$$

其中$\|\pi_u(v)\|$表示$\pi_u(v)$的H_u-范数。（1）的收敛性蕴涵至多有可列个$\pi_u(v)$不等于0。在H中，内积将用公式

$$(2)\qquad (v', v'')=\sum_u(\pi_u(v'), \pi_u(v''))\quad (v', v''\in H)$$

定义，因此$\|v\|^2=(v, v)$就是（1）式的左端。读者可以自己验证这个H满足Hilbert空间的各个公理。

接下来考虑$\mathscr{B}(H)$。设$S_u\in\mathscr{B}(H_u)$，如果对于任何$u\in A$，有$\|S_u\|\leqslant M$；那么，我们可以定义S为在每个H_u上与S_u作用相同的算子，也就是说：对于$v\in H$，Sv在H_u内的坐标是

$$(3)\qquad \pi_u(Sv)=S_u\pi_u(v).$$

不难证明：$v\in H$时$Sv\in H$，因而$S\in\mathscr{B}(H)$，并且

$$(4)\qquad \|S\|=\sup_u\|S_u\|.$$

最后，我们可以利用定理3.7.2中定义在H_u上的算子T_u，使得每个$x\in A$对应于一个算子$T(x)\in\mathscr{B}(H)$；具体做法是规定

(5) $\pi_u(T(x)v)=T_u(x)(\pi_u(v)) \qquad (v\in H)$。

因为定理3.7.2已证

(6) $\|T_u(x)\|\leqslant\|x\|=\|T_x(x)\|$，

所以由（4）式即得

(7) $\|T(x)\|=\mathrm{Sup}\|T_u(x)\|=\|x\|$。

至于从A到$\mathscr{B}(H)$的映射$x\mapsto T(x)$还具有的其它性质，只须将定理3.7.2应用于各个坐标就能得出。 □

定理 3.7.3 可以说是C^*-代数的表示定理．它指出在等距$*$-同构的意义下，C^*-代数实质上只有一种：某个Hilbert空间H的$\mathscr{B}(H)$的含有恒等算子I的C^*-子代数。

习 题

以下各题中的字母H均表示Hilbert空间。

1．对"一般内积空间均可完备化而成为 Hilbert 空间"这个命题做更精确的叙述，并给出证明．

2．设N是一个正整数，$\alpha\in\mathbf{C}$，$\alpha^N=1$但是$\alpha^2\neq1$。试证任何H空间的内积均满足恒等式

$$(x,\ y)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x+\alpha^n y\|^2\alpha^n;$$

以及

$$(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^2e^{i\theta}d\theta.$$

如果加以推广，在一个集合Ω上的哪些函数f与测度μ能使恒等式

$$(x,\ y)=\int_{\Omega}\|x+f(p)y\|^2d\mu(p)$$

成立？

3．(a) 设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是H的闭单位球内的两个点列，并且$n\to\infty$时$(x_n,y_n)\to1$。试证$n\to\infty$时$\|x_n-y_n\|\to0$。

(b) 设$\{x_n\}\subset H$，x_n弱收敛于x，并且$\|x_n\|\to\|x\|$。试证$\|x_n-x\|\to 0$。

4．设H^*为H的对偶空间，映射$\psi:H^*\to H$由

$$y^*(x)=(x,\psi y^*) \qquad (x\in H, y^*\in H^*)$$

定义（参看定理3.1.5）．试证H^*是Hilbert空间，相应的内积为

$$[x^*,y^*]=(\psi y^*,\psi x^*).$$

设$\phi:H^{**}\to H^*$对于一切$y^*\in H^*$及$z^{**}\in H^{**}$都能满足$z_{**}(y^*)=[y^*,\phi z^{**}]$，试证$\psi\phi$是$H^{**}$到$H$上的一个同构；它的存在蕴涵$H$是自反空间。

5．设$\{u_n\}\subset H$是单位向量（即$\|u_n\|=1$）序列，又设

$$\Gamma^2=\sum_{i\neq j}|(u_i,u_j)|^2<\infty.$$

试证对于任何纯量序列$\{\alpha_i\}$都有

$$(1-\Gamma)\sum_{i=m}^{n}|\alpha_i|^2\leqslant\left\|\sum_{i=m}^{n}\alpha_i u_i\right\|^2$$

$$\leqslant(1+\Gamma)\sum_{i=m}^{n}|\alpha_i|^2,$$

再证有关$\{\alpha_i\}$的以下三个性质彼此等价：

(a) $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$；

(b) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u_i$依$H$的范数收敛；

(c) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(u_i,y)$对于每个$y\in H$来说都是收敛的。

这样就推广了定理3.1.6。

6．试证定义3.2.1中的单位分解E对于任何$x\in H$，$y\in H$以及$\omega\in\mathfrak{M}$都有

$$|E_{x,y}(\omega)|^2 \leqslant E_{x,x}(\omega)E_{y,y}(\omega).$$

7．如果$U\in\mathscr{B}(H)$是酉算子，$\sigma(U)$是单位圆的一个真子集，那么，对于任给$\varepsilon>0$，均能选取纯量α_0，…，α_n使

$$\|U^{-1}-\alpha_0 I-\alpha_1 U-\cdots-\alpha_n U^n\|<\varepsilon$$

成立。但是，如果$\sigma(U)$复盖了整个单位圆，这个范数就绝不会小于1．试证之。

8．（a）将定理3.5.5(a)中的UP换成PU，然后重新证明。

（b）设可逆算子$T\in\mathscr{B}(H)$的极分解是$T=UP$．试证，T是正规算子当且仅当$UP=PU$.

9．试证任何可逆正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$都能表示成某个正规算子$S\in\mathscr{B}(H)$的指数。

10．设$N\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，而$T\in\mathscr{B}(H)$是可逆算子。试证TNT^{-1}是正规算子当且仅当N与T^*T交换。

11．（a）设$S\in\mathscr{B}(H)$，$T\in\mathscr{B}(H)$均为正规算子，并且$ST=TS$．试证$S+T$与ST也都是正规算子。

（b）若是对（a）中的S,T再附加条件$S\geqslant 0$及$T\geqslant 0$，试证$S+T\geqslant 0$，$ST\geqslant 0$。

（c）指出确实存在$S\geqslant 0$，$T\geqslant 0$使得ST并非正规算子（当然也就$ST\neq TS$）．事实上，$\dim H=2$时就有这样的例子。

12．如果$T\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，那么将有某个酉算子U使得$T^*=UT$，试证之；并且考虑在什么情况下U是唯一的？

13．如果$T\in\mathscr{B}(H)$，而且T^*T是紧算子，那么T也是紧算子，试证之。

14．找出一个非紧算子$T\in\mathscr{B}(H)$，它有$T^2=0$．试问这样的T能够是正规算子吗？

15．设正规算子$T\in\mathscr{B}(H)$的谱$\sigma(T)$是有限集，在这一前提下，尽量多推导一些有关T的结论。

16．将定理3.4.2的（d）作为题设条件，求证算子方程$Ty=x$有解$y\in H$当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2} \| x_i \|^2 < \infty.$$

（如果某个$\lambda_i = 0$，那么必定相应的$x_i = 0$.）

17. $T \in \mathscr{B}(H)$ 的谱$\sigma(T)$ 能够分成三块互不相交的部分：

点谱 $\sigma_P(T)$，它由$T-\lambda I$不是一对一地那些$\lambda \in \boldsymbol{C}$组成；

连续谱 $\sigma_C(T)$，它由$T-\lambda I$一对一地将H映射到H的稠密真子集上的所有$\lambda \in \boldsymbol{C}$组成；

剩余谱$\sigma_r(T)$，它是$\sigma(T)$去掉$\sigma_P(T) \cup \sigma_C(T)$之后的余集。

（a）试证任何正规算子$T \in \mathscr{B}(H)$ 的剩余谱均为空集。

（b）试证，当H为可分空间时，正规算子$T \in \mathscr{B}(H)$ 的点谱至多为可列集。

（c）设S_R与S_L分别是作用于Hilbert空间l^2上的向右和向左移位子（参看第1章习题1）。

试证 $(S_R)^* = S_L$，以及

$\sigma_P(S_L) = \sigma_r(S_R) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$,

$\sigma_C(S_L) = \sigma_c(S_R) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$,

$\sigma_r(S_L) = \sigma_p(S_R) = \varnothing$.

18. 设 S_R 与 S_L 为上题所述，试证 S_R 与 S_L 都不能有极分解 UP.

19. 设 $T \in \mathscr{B}(H)$ 是正规算子，A是 $\mathscr{B}(H)$ 内由I，T与T^*生成的闭子代数。试问，如果T能够依$\mathscr{B}(H)$的范数拓扑用属于A的射影算子的有限项线性组合去逼近，则$\sigma(T)$必须有什么样的（充分必要）条件？

20. 试问：

（a）任何正规算子$T \in \mathscr{B}(H)$在$\mathscr{B}(H)$ 内都能有一个平方根吗？

（b）算子$T \in \mathscr{B}(H)$的所有平方根组成的集合，其基数是怎样的？

（c）同一个算子T的两个平方根不能交换的情况，有可能

出现吗？特别是，如果$T=I$呢？

21．证明Fourier 变换$f\longmapsto\hat{f}$是$L^2(R^n)$上的一个酉算子，并且研究它的谱。

提示：当$n=1$时，求出

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^m\exp(-x^2)\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的Fourier变换。

22．求证

（a）任何两个无限维的可分 Hilbert 空间都是等距同构的；

（b）定理3.6.2提到的空间$\mathscr{H}$是可分空间；

（c）在无限维 Hilbert 空间H中，可逆算子T不可能仅用一个指数表示，无论H是否为可分空间。

23．设$T\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，f是$\sigma(T)$上的一个有界Borel函数，$S=f(T)$，E_T与E_S分别为T与S的谱分解。试证任何Borel集$\omega\subset\sigma(S)$都有

$$E_S(\omega)=E_T(f^{-1}(\omega)).$$

24．设$S\in\mathscr{B}(H)$，$T\in\mathscr{B}(H)$，记号$S\geqslant T$意味着$S-T\geqslant 0$，即任何$x\in H$都有$(Sx,\ x)\geqslant(Tx,\ x)$。

试证下述有关一对自伴射影算子P与Q的四个性质彼此等价：

（a）$P\geqslant Q$；

（b）$\mathscr{R}(P)\supset R(Q)$；

（c）$PQ=Q$；

（d）$QP=Q$。

如果E是单位分解，则$E(\omega')\geqslant E(\omega'')$当且仅当$\omega'\supset\omega''$。

25．设$*$是复代数A内的一个对合，q是A的一个可逆元，并且$q^*=q$；再对每个$x\in A$定义$x^\#$为

$$x^\#=q^{-1}x^*q.$$

试证$\#$也是A内的一个对合。

26. 设A为全体4×4复矩阵组成的代数. 如果$M=(m_{ij})\in A$, 设M^*为M的共轭转置: $m^*_{ij}=\bar{m}_{ji}$. 置

$$Q=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix};\quad S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

并与上一题同样地定义

$$M^{\#}=Q^{-1}M^*Q \qquad (M\in A).$$

(a) 试证S与T按照对合#来说是正规算子, 且有$ST=TS$, 但是$ST^{\#}\neq T^{\#}S$.

(b) 试证$S+T$并非#-正规.

(c) 比较$\|SS^{\#}\|$与$\|S\|^2$的值.

(d) 计算谱半径$\rho(S+S^{\#})$, 指出它与$\|S+S^{\#}\|$的值不同.

(e) 定义$V=(v_{ij})\in A$:

$v_{12}=v_{24}=i$; $v_{31}=v_{43}=-i$;

其它的i和j则是$v_{ij}=0$.

计算$\sigma(VV^{\#})$, 指出它不在$[0, \infty)$之内.

(这个习题可以说是前面一些定理的反例. (a) 表明定理3.1.16在某些对合的背景下可能失效; (b) 表明本章习题11的(a) 也是如此; (c), (d) 和 (e) 则表明, 如果取对合#, 定理2.4.7的有关部分将不能成立.)

27. 设X是由全体实轴上的三角多项式构成的向量空间: 这些函数都可以记作

$$f(t)=c_1e^{is_1t}+\cdots+c_ne^{is_nt},$$

其中$s_k\in \mathbf{R}$, $c_k\in \mathbf{C}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

试证

$$(f, g)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\overline{g}(t)dt$$

是X上的一个内积, 并且

$$\|f\|=(f, f)=|c_1|^2+\cdots+|c_n|^2,$$

X完备化后将是不可分的Hilbert空间H。

再证H包含了三角多项式的所有的一致极限，它们就是$\boldsymbol{R}$上的所谓"殆周期函数"。

28. 设H_W是无限维的Hilbert空间，赋予弱拓扑。证明其内积是$H_W \times H_W$上的一个分别连续函数，而不是联合连续的。

29. 设X是一致凸Banach空间。这就是说，按照定义，题设条件

$$\|x_n\| \leqslant 1, \quad \|y_n\| \leqslant 1, \quad \|x_n + y_n\| \to 2$$

蕴涵$\|x_n - y_n\| \to 0$。

试证

（a）定理3.1.3在X内成立。

（b）如果$\|x_n\| = 1$，$\Lambda \in X^*$，$\|\Lambda\| = 1$，$\Lambda x_n \to 1$，那么，$\{x_n\}$依X的范数拓扑是Cauchy序列。

提示：考虑$\Lambda(x_n + x_m)$。

（c）任何$\Lambda \in X^*$都将在X的闭单位球上取得其极大值。

（d）如果$x_n \to x$是弱收敛，又有$\|x_n\| \to \|x\|$，那么$\|x_n - x\| \to 0$。

提示：将问题归结为$\|x_n\| = 1$的情况，然后对于适当的Λ考虑$\Lambda(x_n + x)$。

（e）指出上述四个性质将在某些Banach空间失效，例如L^1与C。因此这些空间就不是一致凸的。但是，任何Hilbert空间都是一致凸空间。

30. 评注3.5.6曾经指出，任何$T \in \mathscr{B}(H)$都有因子分解

$$T = VP,$$

其中P是正算子，V是$\mathscr{R}(P)$到$\mathscr{R}(T)$上的一个线性等距。如果V能扩张成为H上的一个酉算子，这时T就有一个极分解。试证，当$\dim H < \infty$时这样的扩张一定能实现。

第4章　Hilbert空间上的无界算子

讨论无界算子是有实际背景的。例如，施行于空间L^2中微商也属于L^2的一切绝对连续函数的微分算子就是一个无界算子。它在波动力学中有重要的作用。本章的核心内容是去掉有界条件重新研究谱定理，并且得到与第3章相同的结论。全书最后一节的篇幅分配给算子半群。然而仅作了极为扼要的叙述.不过，还是介绍了十分有用的Hilbert空间上单参数酉算子半群的Stone定理。

4.1　基本概念

4.1.1 定义

算子　设H为Hilbert空间。今后，如果我们提到H内一个算子时没有附加其它条件，只是简单地称之为算子，那就是一个线性映射，它的定义域$\mathscr{D}(T)$是H内的一个子空间，值域$\mathscr{R}(T)\subset H$.

如果$\mathscr{D}(T)$在H内稠密，就说算子T是**稠密定义的**。

上述定义并未规定T有界或连续，因而有界算子（或连续算子）可以视为一个特款，而且，如果算子T是连续的(就$\mathscr{D}(T)$从H继承的范数拓扑而言)，那么T应当能连续扩张到$\overline{\mathscr{D}(T)}$上，进而还能连续扩张到整个$H$上，因为$\overline{\mathscr{D}(T)}$在$H$内完备。这样的$T$实质上是$\mathscr{B}(H)$的某个元限制于$\mathscr{D}(T)$上。

伴随算子　设算子T是稠密定义的。设$y\in H$是这样一个元素，它能使H内相应地存在一个元素y^*，对于任何$x\in\mathscr{D}(T)$都有

$$(Tx,y)=(x,y^*)；$$

这时y^*由y唯一地确定，令

$$y^* = T^* y,$$

就定义了一个算子T^*，称之为**算子T的伴随算子**。

显然，算子T^*确实是H内的一个线性映射。因为，如果它在y_1与y_2有定义，则任何$x \in \mathscr{D}(T)$都有

$$\begin{aligned}(Tx, c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \bar{c}_1 (Tx, y_1) + \bar{c}_2 (Tx, y_2) \\ &= \bar{c}_1 (x, T^* y_1) + \bar{c}_2 (x, T^* y_2) \\ &= (x, c_1 T^* y_1 + c_2 T^* y_2).\end{aligned}$$

因此 $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in \mathscr{D}(T^*)$ （于是$\mathscr{D}(T^*)$是H内的一个子空间）并且

$$T^*(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 T^* y_1 + c_2 T^* y_2.$$

图象 所谓H内的算子T的图象$\mathscr{G}(T)$乃是$H \times H$内由有序偶$\{x, Tx\}$组成的子空间，其中的x将历遍$\mathscr{D}(T)$.

如果H内的两个算子S与T满足条件$\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(S)$，并且当$x \in \mathscr{D}(T)$时恒有$Sx = Tx$，那么就说是$\mathscr{G}(T) \subset \mathscr{G}(S)$，或者简单地记作$T \subset S$.

根据伴随算子的定义，由$T \subset S$将得出$T^* \supset S^*$。这是因为：对于$x \in \mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(S)$来说，如果$y \in \mathscr{D}(S^*)$，就有

$$(Tx, y) = (Sx, y) = (x, S^* y).$$

所以$y \in \mathscr{D}(T^*)$.

闭算子 如果H内的算子T的图象是$H \times H$内的一个闭子空间，T称为闭算子。

根据闭图象定理，$T \in \mathscr{B}(H)$的充分必要条件是：$\mathscr{D}(T) = H$，并且T是闭算子。

对于无界算子施行代数运算时，要特别注意它们的定义域。下面是和与积的定义域的内涵。

$$\mathscr{D}(S+T) = \mathscr{D}(S) \cap \mathscr{D}(T);$$

$$\mathscr{D}(ST) = \{x \in \mathscr{D}(T) : Tx \in \mathscr{D}(S)\}.$$

4.1.2 定理 如果S, T与ST都是在H内稠密定义的算子，那么将有

（1） $T^* S^* \subset (ST)^*$.

作为特款，当$S\in\mathscr{B}(H)$时，可以得到

（2）　　$T^*S^*=(ST)^*$.

证　设$x\in\mathscr{D}(ST)$．$y\in\mathscr{D}(T^*S^*)$．这时，因为$x\in\mathscr{D}(T)$，$S^*y\in\mathscr{D}(T^*)$，所以

（3）　　$(Tx,S^*y)=(x,T^*S^*y)$；

又因　$Tx\in\mathscr{D}(S)$，$y\in\mathscr{D}(S^*)$，所以

（4）　　$(STx,y)=(Tx,S^*y)$.

于是得到

（5）　　$(STx,y)=(x,T^*S^*y)$.

这表明由$y\in\mathscr{D}(T^*S^*)$能推导出$y\in\mathscr{D}((ST)^*)$，因而包含关系（1）成立。

现在考虑特款$S\in\mathscr{B}(H)$，设$y\in\mathscr{D}((ST)^*)$。这时有$S^*\in\mathscr{B}(H)$，所以$\mathscr{D}(S^*)=H$；并且，对于所有的$x\in\mathscr{D}(ST)$，都有

（6）　　$(Tx,S^*y)=(STx,y)=(x,(ST)^*y)$.

因此$S^*y\in\mathscr{D}(T^*)$，进而得知$y\in\mathscr{D}(T^*S^*)$。这样，由条件$S\in\mathscr{B}(H)$又能推导出与（1）相反的包含关系

（7）　　$(ST)^*\subset T^*S^*$.

所以等式（2）成立。　□

4.1.3 对称算子

定义　空间H内的算子T称为**对称算子**，如果对于任何$x\in\mathscr{D}(T)$，$y\in\mathscr{D}(T)$来说

$$(Tx,y)=(x,Ty)$$

都成立。

由定义可以看出，对称算子T的伴随算子T^*也是对称算子，因为：

$$(T^*x,y)=\overline{(y,T^*x)}=\overline{(Ty,x)}=\overline{(y,Tx)}$$
$$=(Tx,y)=(x,T^*y).$$

定理　稠密定义的算子T成为对称算子的充分必要条件是$T\subset T^*$.

证 先证必要性。设T是对称算子，按照定义，$x\in\mathscr{D}(T)$，$y\in\mathscr{D}(T)$时有$(Tx,y)=(x,Ty)$。由于算子T是稠密定义的，因此T的伴随算子T^*存在并且$(Tx,y)=(x,T^*y)$。于是我们得到$y\in\mathscr{D}(T^*)$和$Ty=T^*y$，这意味着$T\subset T^*$。

再证充分性。设$T\subset T^*$成立，也就是说，当$y\in\mathscr{D}(T)$时必定$y\in\mathscr{D}(T^*)$，并且在$\mathscr{D}(T)$上恒有$Ty=T^*y$。由于稠密定义的算子T恒有伴随算子T^*存在，以及$(Tx,y)=(x,T^*y)$。因而得到$(Tx,y)=(x,Ty)$，即T是对称算子。 □

当$T=T^*$时，T称为**自伴算子**。

在第3章我们已经熟知，有界算子$T\in\mathscr{B}(H)$的自伴与对称这两个性质是吻合的。但是，无界算子T则不然，因为上述定理指出：对称性相当于$T\subset T^*$。可见对称算子不一定都是自伴算子。

4.1.4 例

例1。设$H=L^2=L^2([0,1])$，相应的测度取Lebesgue测度。然后在L^2内定义算子T_1，T_2和T_3，它们的定义域分别为：

$\mathscr{D}(T_1)$由$[0,1]$上的全体绝对连续函数f组成，并且$f'\in L^2$；

$\mathscr{D}(T_2)=\mathscr{D}(T_1)\cap\{f:f(0)=f(1)\}$；

$\mathscr{D}(T_3)=\mathscr{D}(T_1)\cap\{f:f(0)=f(1)=0\}$。

这三个集都在L^2内稠密。对于$f\in\mathscr{D}(T_k)$ $(k=1,2,3)$，定义

（1） $T_k=if'$.

T_k与其伴随算子T_k^*有以下关系：

（2） $T_1^*=T_3$；$T_2^*=T_2$；$T_3^*=T_1$。

由于$T_3\subset T_2\subset T_1$，因此$T_2$是对称（并非自伴）算子$T_3$的一个自伴扩张，而$T_2$的扩张$T_1$却不是对称算子。

我们来求证（2）。首先注意到

$$(3)\qquad (T_kf,g)=\int_0^1(if')\bar{g}=\int_0^1 f\,(\overline{ig'})=(f,T_mg)$$

在 $f\in\mathscr{D}(T_k)$，$g\in\mathscr{D}(T_m)$ 且$m+k=4$时成立，因为这时有 $f(1)\overline{g(1)}=f(0)\overline{g(0)}$。由此可知$T_m\subset T_k^*$，或者分别写成

(4)　　$T_1\subset T_3^*$；$T_2\subset T_2^*$；$T_3\subset T_1^*$.

然后，设 $g\in\mathscr{D}(T_k^*)$，$\phi=T_k^*g$。置 $\Phi(x)=\int_0^x\phi$。于是，对$f\in\mathscr{D}(T_k)$，可以计算出

(5)　　$$\int_0^1(if')\bar{g}=(T_kf,g)=(f,\phi)$$

$$=f(1)\overline{\Phi(1)}-\int_0^1 f'\overline{\Phi}.$$

由于$k=1$，2时，$\mathscr{D}(T_k)$ 含有非零常数，因此（5）式蕴涵 $\Phi(1)=0$；而当 $k=3$时，有 $f(1)=0$. 所有这些情况，都能得到

(6)　　$ig-\Phi\in\mathscr{R}(T_k)^\perp$.

由于$\mathscr{R}(T_1)=L^2$，如果$k=1$，那么$ig=\Phi$；但是前面已经指出$\Phi(1)=0$，因而$g\in\mathscr{D}(T_3)$. 所以$T_1^*\subset T_3$.

如果$k=2$或3，这时$\mathscr{R}(T_k)$ 由全体能使$\int_0^1 u=0$的$u\in L^2$组成，所以

(7)　　$\mathscr{R}(T_2)=\mathscr{R}(T_3)=Y^\perp$；

其中Y是L^2的一维子空间，它包含常数。于是，（6）式蕴涵 $ig-\Phi$等于常数。因而g是绝对连续函数，并且$g'\in L^2$。也就是说$g\in\mathscr{D}(T_1)$。固定$k=3$，现在证得$T_3^*\subset T_1$.

至于$k=2$，前面已经指出$\Phi(1)=0$，因而$g(0)=g(1)$，于是$g\in\mathscr{D}(T_2)$。我们又证明了$T_2^*\subset T_2$.

最后，回顾包含关系（4），就知道求证（2）式的工作已经完成。

例2. 与例1同样地取 $H=L^2$. 对于 $f\in\mathscr{D}(T_1)$，定义 $Df=f'$；再定义$(Mf)(t)=tf(t)$。这时有 $(DM-MD)f=f$，

或

（1）　　$DM-MD=I$，

其中I表示D的定义域上的恒等算子.

在（1）式中出现的恒等算子可以看成是两个算子的**换位子**，但是，这两个算子当中仅有一个是有界算子．从而引出一个问题：恒等算子能否成为H上的两个有界算子的换位子？答案是否定的．不仅在$\mathscr{B}(H)$内，而是在任何Banach代数中都将如此．因为有下面的定理．

4.1.5 定理　对于Banach代数A的单位元e来说，任取x，$y\in A$，都有

$$xy-yx\neq e.$$

证　用反证法.

假定$xy-yx=e$。作归纳法假设

（1）　　$x^ny-yx^n=nx^{n-1}\neq 0$，

那么$n=1$时已经成立．如果（1）式对于某个正整数n能够成立，则$x^n\neq 0$；而且

$$\begin{aligned}x^{n+1}y-yx^{n+1}&=x^n(xy-yx)+(x^ny-yx^n)x\\&=x^ne+nx^{n-1}x\\&=(n+1)x^n,\end{aligned}$$

这表明（1）式中的n换成$n+1$之后仍能成立．由此推知，对于一切正整数n，都有

$$\begin{aligned}n\|x^{n-1}\|=\|x^ny-yx^n\|&\leqslant 2\|x^n\|\|y\|\\&\leqslant 2\|x^{n-1}\|\|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

从而导致$n\leqslant 2\|x\|\|y\|$．这是不可能的．　□

4.2　闭算子，对称算子和自伴算子

4.2.1 图象法

前一节已定义H空间内的算子T的图象是$H\times H$内的有序偶$\{x,Tx\}$组成的子空间；并指出关系式$T\subset S$等价于$\mathscr{G}(T)\subset\mathscr{G}(S)$，

那么，$T=S$显然等价于$\mathscr{G}(T)=\mathscr{G}(S)$。这说明$H$空间上的算子的某些问题的结论，可能从它们在$H\times H$空间的图象的性质得出。这种方法将称为**图象法**。应用图象法时，首先要使Hilbert空间H的乘积空间$H\times H$也成为一个Hilbert空间。为此，定义$H\times H$内的两个元$\{a, b\}$与$\{c, d\}$的**内积**为

$$(1)\qquad (\{a, b\}, \{c, d\})=(a, c)+(b, d),$$

其中(a, c), (b, d)仍表示H空间的内积。验证这个定义满足内积所应当具备的各个性质是很容易的工作，在此不再赘述。至于$H\times H$内的元素的**范数**则由下式给出：

$$(2)\qquad \|\{a, b\}\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2.$$

图象法要经常用到$H\times H$上的一个算子V，它由下式

$$(3)\qquad V\{a, b\}=\{-b, a\}\qquad (a, b\in H)$$

定义。这时显然有

$$(4)\qquad V^*\{a, b\}=\{b, -a\}.$$

于是得到

$$(5)\qquad VV^*=V^*V=I,$$

其中I是$H\times H$空间上的恒等算子。沿用过去的名词，可以将V称为$H\times H$空间上的一个**酉算子**。注意到

$$(6)\qquad V^2=-I,$$

那么，如果$M\subset H\times H$是一个子空间，将有

$$V^2M=M.$$

应用图象法研究H空间上的算子T与T^*之间的关系时，$H\times H$空间上的算子V可以发挥不少的作用。

4.2.2 定理 对于H空间内稠密定义的算子T来说，以下结论成立：

(a) $\mathscr{G}(T^*)=[V\mathscr{G}(T)]^{\perp}$,

其中$[V\mathscr{G}(T)]^{\perp}$是$V\mathscr{G}(T)$在$H\times H$内的正交补；

(b) T^*必定是闭算子；作为特款，自伴算子是闭算子；

(c) 如果T是闭算子，那么$H\times H$空间将是两个正交子空间的直和

$$H \times H = V\mathscr{G}(T) \oplus \mathscr{G}(T^*).$$

注意到$H \times H$空间上的酉算子V的性质$V^2 = -I$，(c) 中的直和也可以用另外两个正交子空间：

$$H \times H = \mathscr{G}(T) \oplus V\mathscr{G}(T^*).$$

证 （a）以下四项陈述中的每一个，显然与它前面或后面的一项是等价的：

（1）$\{y,z\} \in \mathscr{G}(T^*)$；

（2）$(Tx, y) = (x, z)$ 于任何$x \in \mathscr{D}(T)$；

（3）$(\{-Tx, x\}, \{y, z\}) = 0$ 于任何$x \in \mathscr{D}(T)$；

（4）$\{y,z\} \in [V\mathscr{G}(T)]^\perp$.

（b）求证定理3.1.4的第一自然段的叙述中曾经提到，任何$E \subset H \times H$作出的$E^\perp$都是闭集。因此，由（a）可知$\mathscr{G}(T^*)$是$H \times H$内的闭图象。

（c）因为题设T为闭算子，所以$\mathscr{G}(T)$是闭图象；既然V是酉算子，那么$V\mathscr{G}(T)$仍然是闭图象。应用定理3.1.4的推论，就可以由结论（a）得出$V\mathscr{G}(T) = [\mathscr{G}(T^*)]^\perp$. □

推论 对于任何$a \in H$，$b \in H$来说，方程组

$$-Tx + y = a$$

$$x + T^*y = b$$

有唯一的解$x \in \mathscr{D}(T)$，$y \in \mathscr{D}(T^*)$.

证 这是应用定理中的结论（c）的一个实例。 □

下面的定理给出了几个能使对称算子成为自伴算子的条件，证明时主要是应用图象法。

4.2.3 定理 设T是在H空间内稠密定义的对称算子。

（a）如果$\mathscr{D}(T) = H$，那么T是自伴算子，并且是连续的，也就是说$T \in \mathscr{B}(H)$.

（b）如果T是自伴算子，又是一对一的，那么$\mathscr{R}(T)$在H内稠密，并且T^{-1}也是自伴算子。

（c）如果$\mathscr{R}(T)$在H内稠密，那么T是一对一的。

（d）如果$\mathscr{R}(T) = H$，那么T是自伴算子，并且$T^{-1} \in \mathscr{B}$

(H).

证 （a）按照题设，$T \subset T^*$，如果$\mathscr{D}(T)=H$，就应当是$T=T^*$。再由定理 4.2.2 的（b）可知T是闭算子，因而根据闭图象定理又能得到T的连续性。

（b）设$y \perp \mathscr{R}(T)$。这时映射$x \mapsto (Tx, y)=0$在$\mathscr{D}(T)$内连续，因而$y \in \mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$；并且对于任何$x \in \mathscr{D}(T)$，都有$(x, Ty)=(Tx, y)=0$.因此$Ty=0$.既然题设$T$是一对一的，那么$y=0$。从而证得$\mathscr{R}(T)$在$H$内稠密.

现在有了$\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{R}(T)$，也就是说$T^{-1}$是稠密定义的，因此$(T^{-1})^*$存在。关系式

（1）　　$\mathscr{G}(T^{-1})=V\mathscr{G}(-T)$；$V\mathscr{G}(T^{-1})=\mathscr{G}(-T)$

很容易验证。既然T是自伴算子，$-T$也应当是自伴算子。因此，将定理4.2.2的（c）应用于T^{-1}和$-T$，可以得到正交分解：

（2）　　$H \times H=V\mathscr{G}(T^{-1}) \oplus \mathscr{G}((T^{-1})^*)$；

（3）　　$$\begin{aligned} H \times H &= V\mathscr{G}(-T) \oplus \mathscr{G}(-T) \\ &= \mathscr{G}(T^{-1}) \oplus V\mathscr{G}(T^{-1}). \end{aligned}$$

随即看出

（4）　　$\mathscr{G}((T^{-1})^*)=[V\mathscr{G}(T^{-1})]^{\perp}=\mathscr{G}(T^{-1})$，

也就是$(T^{-1})^*=T^{-1}$。

（c）设$Tx=0$。这时，任何$y \in \mathscr{D}(T)$都有$(x, Ty)=(Tx, y)=0$，也就是说$x \perp \mathscr{R}(T)$。因此$x=0$。

（d）既然$\mathscr{R}(T)=H$，那么由（c）可知T是一对一的，并且$\mathscr{D}(T^{-1})=H$。任取$x \in H$，$y \in H$，应当有唯一确定的$z \in \mathscr{D}(T)$和$w \in \mathscr{D}(T)$，使$x=Tz$，$y=Tw$。因此

$$(T^{-1}x, y)=(z, Tw)=(Tz, w)=(x, T^{-1}y).$$

这就证明了T^{-1}是对称算子。根据（a），T^{-1}将是自伴算子，并且还是有界的。最后，由（b）可知$T=(T^{-1})^{-1}$是自伴算子。

□

4.2.4 定理 如果T是在H内稠密定义的闭算子，那么$\mathscr{D}$

(T^*) 是稠密集，并且$T^{**}=T$。

证 假定$\mathscr{D}(T^*)$在H内不稠密，那么应当有一个$z\neq 0$正交于$\mathscr{D}(T^*)$，也就是说，对于任何$y\in\mathscr{D}(T^*)$都有$(z,y)=0$。这时$H\times H$空间中的内积

$$(\{0,z\},\{-T^*y,y\})=0.$$

因而$\{0,z\}\in[V\mathscr{G}(T^*)]^\perp$。$T$既然是闭算子，定理 4.2.2 的 (*c*) 已证$[V\mathscr{G}(T^*)]^\perp=\mathscr{G}(T)$，那么将得出$\{0,z\}\in\mathscr{G}(T)$。于是$z=T(0)=0$。这与原设相抵触。从而证得闭算子$T$的$\mathscr{D}(T^*)$必定是稠密集，同时可知$(T^*)^*=T^{**}$存在。

现在，利用闭算子T和T^*（参看定理4.2.2的 (*b*)）对$H\times H$作正交分解

(1) $\qquad H\times H=\mathscr{G}(T)\oplus V\mathscr{G}(T^*)$;

(2) $\qquad H\times H=V\mathscr{G}(T^*)\oplus\mathscr{G}(T^{**})$.

比较以上二式，就将得到

(3) $\qquad \mathscr{G}(T^{**})=\mathscr{G}(T)$,

此即 $T^{**}=T$。 □

4.2.5 定理 设T是在H内稠密定义的闭算子，$Q=I+T^*T$.

(*a*) 在上述条件下，Q是从

$$\mathscr{D}(Q)=\mathscr{D}(T^*T)=\{x\in\mathscr{D}(T):Tx\in\mathscr{D}(T^*)\}$$

到H上的一对一的映射，并且存在这样的算子$B\in\mathscr{B}(H)$，$C\in\mathscr{B}(H)$满足条件$\|B\|\leqslant 1$，$\|C\|\leqslant 1$，$C=TB$；以及

(1) $\qquad BQ\subset QB=I$.

此外还有$B\geqslant 0$，T^*T是自伴算子。

(*b*) 如果T'是T在$\mathscr{D}(T^*T)$上的限制，那么$\mathscr{G}(T')$在$\mathscr{G}(T)$内稠密。

这里和以后用到的字母I，总是用来表示定义域为H的恒等算子。

证 (*a*) 如果$x\in\mathscr{D}(Q)$，那么$Tx\in\mathscr{D}(T^*)$，并且可以计算

(2) $\qquad (x,x)+(Tx,Tx)=(x,x)+(x,T^*Tx)$

$$=(x,Qx);$$

因此$\|x\|^2\leqslant\|x\|\,\|Qx\|$，这表明$Q$是一对一的。

根据定理4.2.2的推论，对应于任何$h\in H$，都有唯一的向量$Bh\in\mathscr{D}(T)$和唯一的向量$Ch\in\mathscr{D}(T^*)$使得

(3) $\{0,h\}=\{-TBh,Bh\}+\{Ch,T^*Ch\}$.

显然B和C都是H内的线性算子，它们的定义域就是H。注意到（3）式右端的二个向量彼此正交，按照$H\times H$内的范数的定义，将有

(4) $\|h\|^2\geqslant\|Bh\|^2+\|Ch\|^2 \qquad (h\in H)$,

所以$\|B\|\leqslant 1$，$\|C\|\leqslant 1$。

等式（3）若按照分量写出，那就是：对于任何$h\in H$都有

(5) $0=-TBh+Ch$,

(6) $h=\quad Bh+T^*Ch$.

于是可得

(7) $C=TB$,

(8) $QB=I$.

由（8）式可知，B是从H到$\mathscr{D}(Q)$上的一对一的映射。如果$y\in\mathscr{D}(Q)$，将有某个$h\in H$使得$y=Bh$，因而$Qy=QBh=h$；以及$BQy=Bh=y$。所以$BQ\subset I$。至此证完了（1）。

如果$h\in H$，那么有某个$x\in\mathscr{D}(Q)$使得$h=Qx$，这时由（2）式可得

(9) $(Bh,h)=(BQx,Qx)=(x,Qx)\geqslant 0$,

因而$B\geqslant 0$，B是自伴算子；然后由定理4.2.3的（b）可知Q是自伴算子，于是$T^*T=Q-I$也是自伴算子。

（b）由于T是闭算子，$\mathscr{G}(T)$应当是$H\times H$的一个闭子空间，因此$\mathscr{G}(T)$是Hilbert空间。为了求证$\mathscr{G}(T')$在$\mathscr{G}(T)$内稠密，可以用反证法。

假定有非零元$\{z,Tz\}\in\mathscr{G}(T)$正交于$\mathscr{G}(T')$，那么任何$x\in\mathscr{D}(T^*T)=\mathscr{D}(Q)$都使得

$$\begin{aligned}0&=(\{z,Tz\},\{x,Tx\})=(z,x)+(Tz,Tx)\\&=(z,x)+(z,T^*Tz)=(z,Qx).\end{aligned}$$

但是$\mathscr{R}(Q)=H$，所以$z=0$，$Tz=0$。这与$\{z,Tz\}$是非零元的原设抵触。 □

4.2.6 极大对称算子

定义 H内的对称算子T称为**极大对称的**，如果T不能有真正的对称扩张，也就是说：以下条件

$$T\subset S;\ S\text{对称}$$

蕴涵$T=S$。

定理 自伴算子都是极大对称的算子。

证 设自伴算子T有一个对称扩张S，即$T\subset S$；并且S是对称算子。这时，按照伴随算子的定义，将有$S^*\subset T^*$；而S作为对称算子，又有$S\subset S^*$。以上三个包含关系串连起来，就是

$$S\subset S^*\subset T^*=T\subset S,$$

于是得到$T=S$。可见自伴算子T不能有真正的对称扩张。 □

4.2.7 定理 设T是H内的一个对称算子，但并不要求它是稠密定义的，这时以下各个命题都能成立：

（a）$\|Tx+ix\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2 \qquad (x\in\mathscr{D}(T))$；

（b）T是闭算子，当且仅当$\mathscr{R}(T+iI)$是闭集；

（c）$T+iI$是一对一的；

（d）如果$\mathscr{R}(T+iI)=H$，那么T将是极大对称算子；

（e）当i用$-i$替换时，上述命题（a）～（d）仍然成立。

证 （a）可以由恒等式

$$\|Tx+ix\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2+(ix,Tx)+(Tx,ix)$$

与T的对称性得证。然后从（a）推知

$$(T+iI)x\longleftrightarrow\{x,Tx\}$$

是$\mathscr{R}(T+iI)$与$\mathscr{G}(T)$之间的一个等距的一一对应，这就证明了（b）。至于（c），则是（a）的直接推论。

现在来求证（d）。如果$\mathscr{R}(T+iI)=H$，T_1又是T的一个真扩张（即$\mathscr{D}(T)$是$\mathscr{D}(T_1)$的真子集），那么T_1+iI应当是$T+iI$的一个真扩张；但是，这样一来，T_1+iI就不可能是一对一的，根据（c），T_1将不是对称算子。因此命题（d）成立。

(e) 显而易见。

4.3 Cayley 变换

4.3.1 定义

算子的Cayley变换 用H空间上的对称算子T作出的算子

(1) $U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$

称为算子T的Cayley变换。

只须回顾第3章的有关内容，就能体会到这个定义的指出是很自然的。因为，线性变换

(2) $\lambda\longmapsto\dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}$

将整个实轴一对一地映射为单位圆周（除去点1），如果在§3.3.3的符号运算公式中取 $f(\lambda)=\dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}$，那么，每个（有界）自伴算子$T\in\mathscr{B}(H)$都将产生一个酉算子

(1′) $U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$。

并且，只要是酉算子U的谱$\sigma(U)$不含有点1，它就一定可以用(1′)式表示。

下面来说明，将有界自伴算子T的变换(1′)推广到无界的对称算子T，所给出的定义(1)式的某些细节。

设T是H空间内的一个对称算子，但是并不要求它有界。定理4.2.7的(a)已证，对于任何$x\in\mathscr{D}(T)$都有

(3) $\|(T+iI)x\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2=\|(T-iI)x\|^2$；

该定理的(c)又曾指出$T+iI$是一对一的，因此，对于任何$y\in\mathscr{R}(T+iI)$，只要$(T+iI)^{-1}y\in\mathscr{D}(T)$，就有

(4) $\|(T-iI)(T+iI)^{-1}y\|=\|y\|$；

所以，算子

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

是一个等距，它是在一切形如

(5) $y=(T+iI)x$

的元素所组成的集合$\mathscr{R}(T+iI)$上定义的，它的值域则是$\mathscr{R}(T-iI)$，也就是说

(6) $\qquad \mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$，$\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(T-iI)$。

稍后的定理4.3.3将给出Cayley 变换的若干特征，当讨论谱定理时，就要加以应用。

4.3.2 引理 设H空间内的算子U是一个等距：对于任何$x\in\mathscr{D}(U)$，都有$\|Ux\|=\|x\|$。

(*a*) 如果$x\in\mathscr{D}(U)$，$y\in\mathscr{D}(U)$，那么$(Ux,Uy)=(x,y)$。

(*b*) 如果$\mathscr{R}(I-U)$在H内稠密，那么$I-U$是一对一的。

(*c*) 三个空间$\mathscr{D}(U)$，$\mathscr{R}(U)$与$\mathscr{G}(U)$当中，只要有一个是闭集，则其它两个也将是闭集。

证 利用第3章习题2中的任何一个恒等式，都可以证得(*a*)。至于(*b*)，我们取$x\in\mathscr{D}(U)$，并且设$(I-U)x=0$，亦即$x=Ux$。然后对于$y\in\mathscr{D}(U)$计算出

$$\begin{aligned}(x,(I-U)y)&=(x,y)-(x,Uy)\\&=(Ux,Uy)-(x,Uy)\\&=0,\end{aligned}$$

因此$x\perp\mathscr{R}(I-U)$。既然$\mathscr{R}(I-U)$在H内稠密，那么应当是$x=0$。这就证明了$I-U$是一对一的。

(*c*) 的证明留作练习。 □

4.3.3 定理 对于H空间内的对称算子T的Cayley 变换U来说，以下结论都是正确的：

(*a*) U是闭算子，当且仅当T是闭算子；

(*b*) $\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(T)$，$I-U$是一对一的，并能借助公式

$$T=i(I+U)(I-U)^{-1}$$

用U来表示T；由此可知，不同的对称算子其Cayley 变换也不同；

(*c*) U是酉算子，当且仅当T是自伴算子.

证 (*a*) 可以由定理4.2.7的(*b*)和定义4.3.1中的(6)式得证。

为了求证(b)，只须注意到在$x\in\mathscr{D}(T)$与$z\in\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$之间给出了一一对应$x\longleftrightarrow z$的公式

(1) $z=Tx+ix,\quad Uz=Tx-ix$

也可以写成另一种形式

(2) $(I-U)z=2ix,\quad (I+U)z=2Tx.$

这表明$I-U$是一对一的，$\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(T)$，因此$(I-U)^{-1}$将$\mathscr{D}(T)$映射到$\mathscr{D}(U)$上，这样就可以得到

(3) $2Tx=(I+U)z=(I+U)(I-U)^{-1}(2ix),$

也就是$T=i(I+U)(I-U)^{-1}$.

以下求证(c).

先设T是自伴算子，这时根据定理4.2.5，有

(4) $\mathscr{R}(I+T^2)=H.$

注意到

(5) $(T+iI)(T-iI)=I+T^2=(T-iI)(T+iI),$

(其中涉及到的三个算子$T+iI$，$T-iI$和$I+T^2$的定义域都是$\mathscr{D}(T^2)$)，则由（4）式可知

(6) $\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)=H,$

(7) $\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(T-iI)=H.$

由于U是一个等距，因此（6）与（7）蕴涵U是酉算子（参看定理3.1.13）.

最后，设U是酉算子．这时，由(b)与算子$I-U$的正规性（参看定理3.1.12）可知

(8) $[\mathscr{R}(I-U)]^{\perp}=\mathscr{N}(I-U)=\{0\},$

因而$\mathscr{D}(T)=\mathscr{R}(I-U)$在$H$内稠密．这表明算子$T$的伴随算子$T^*$存在，并且$T\subset T^*$.

若选定$y\in\mathscr{D}(T^*)$，由于$\mathscr{R}(T+iI)=\mathscr{D}(U)=H$，因而有$y_0\in\mathscr{D}(T)$使

(9) $(T^*+iI)y=(T+iI)y_0=(T^*+iI)y_0$

成立；其中最后一个等式能够成立，是因为前已证得$T\subset T^*$．如果记$y_1=y-y_0$，那么（9）式表明$y_1\in\mathscr{D}(T^*)$，并且对于任何

$x\in\mathscr{D}(T)$都有

(10) $\quad ((T-iI)x,y_1)=(x,(T^*+iI)y_1)=(x,0)=0.$

上式表明 $y_1\perp\mathscr{R}(T-iI)=\mathscr{R}(U)=H$，因此$y_1=0$，或者说 $y=y_0\in\mathscr{D}(T)$，这样又得到$T^*\subset T$. □

下面的定理可以说是刚刚证明的定理4.3.3的逆定理。

4.3.4 定理 如果H空间内的算子U是一个等距，$I-U$又是一对一的，那么，U将是H空间内的某个对称算子的Cayley变换。

证 按照题设，在$z\in\mathscr{D}(U)$与$x\in\mathscr{R}(I-U)$之间有一个一对应$z\longleftrightarrow x$由等式

(1) $\quad x=z-Uz$

给出。对于这样的$x=z-Uz$，我们在$\mathscr{D}(S)=\mathscr{R}(I-U)$上定义算子$S$：

(2) $\quad Sx=i(z+Uz).$

再取$y\in\mathscr{D}(S)=\mathscr{R}(I-U)$，与（1）式同样地，将有$w\in\mathscr{D}(U)$使得

(3) $\quad y=w-Uw.$

由于U是一个等距，应用引理4.3.2，可以得到

(4) $$\begin{aligned}(Sx,y)&=i(z+Uz,\ w-Uw)\\&=i(Uz,w)-i(z,Uw)\\&=(z-Uz,iw+iUw)\\&=(x,Sy).\end{aligned}$$

因此S是对称算子. 注意到由（1）和（2）式可以推出：

(5) $\quad 2iUz=Sx-ix;$

(6) $\quad 2iz=Sx+ix.$

我们就得到

(7) $\quad U(Sx+ix)=Sx-ix.$

这表明$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(S+iI)$，$\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(S-iI)$. 所以$U$是对称算子$S$的Cayley变换。 □

4.3.5 亏子空间与亏指数

对于任意的闭对称算子T来说，Cayley变换U的定义域$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$与值域$\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(T-iI)$一般地未必与整个空间$H$重合；但是$U$是等距，又是闭算子，所以这两个集都是闭集，也就是说，它们都是H的子空间，因此有以下的定义。

定义 设T是H空间内的一个稠密定义的闭对称算子，它的Cayley变换$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$的定义域和值域的正交补

$$[\mathscr{R}(T+iI)]^{\perp};\ [\mathscr{R}(T-iI)]^{\perp}$$

称为**算子T的亏子空间**；两个亏子空间的维数（有限数或无穷）则称为**算子T的亏指数**。

提出算子的亏子空间与亏指数的概念，主要是为了研究对称算子的自伴扩张问题，为将来讨论谱定理做准备。

读者已经知道，对称算子T的Cayley变换U是$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$到$\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(T-iI)$上的一个等距。如果$U$和$U_1$分别是对称算子$T$和$T_1$的Cayley变换，显然$T\subset T_1$当且仅当$U\subset U_1$。因此对称算子的对称扩张问题可以转化为相应的Cayley变换的等距扩张问题，而后一个问题往往比较容易解决。

例如，任何等距U都可以唯一地扩张成为$\overline{\mathscr{D}(U)}$上的等距，于是，由定理4.3.3的（$a$）可知，$H$空间内的任何对称算子都有一个闭对称扩张。

此外，如果对称算子T在H空间内稠密，也就是说$\mathscr{D}(T)=\mathscr{R}(I-U)$在$H$空间内稠密；那么，$U$的任一等距扩张$U_1$的$\mathscr{R}(I-U_1)$在$H$空间内也是稠密的，根据引理4.3.2的（$b$），$I-U_1$是一一对应，因此$U_1$将是$T$的一个对称扩张$T_1$的Cayley变换。

4.3.6 定理 对于在H空间内稠密定义的闭对称算子T来说，以下结论都是正确的：

（a）T是自伴算子，当且仅当T的两个亏指数皆为0；

（b）T是极大对称算子，当且仅当T的两个亏指数中至少有一个等于0；

（c）T有一个自伴扩张，当且仅当T的两个亏指数相当。

证 （a）与（b）显而易见。

为了求证 (c)，只须应用定理 4.3.3 的 (c)，并且注意到U的任何酉扩张必定是$[\mathscr{R}(T+iI)]^{\perp}$到$[\mathscr{R}(T-iI)]^{\perp}$上的一个等距．因此相应的$T$的两个亏指数相等． □

最后，我们给出一个稠密定义的极大对称的闭算子，而又不是自伴算子的实例．

4.3.7 例 设V是l^2上的右移位子．这时V是一个等距，$I-V$是一对一的（参看第3章习题17），因而V是一个对称算子T的Cayley变换．由于$\mathscr{D}(V)=l^2$，以及$\mathscr{R}(V)$的余维数是 1，所以T的亏指数分别为 0 和 1．根据定理 4.3.6 的 (a)，我们知道V不是自伴算子．

4.4 单位分解

我们将沿用定义 3.2.1 中讲过的单位分解的概念和符号．定理 3.2.4 实质上是给出一种符号运算，借助于公式

$$(\psi(f)x,y)=\int_{\Omega} f\,dE_{x,y}$$

使得每个 $f\in L^{\infty}(E)$ 与相应的算子 $\psi(f)\in\mathscr{B}(H)$ 联系起来．

这一节的主要工作就是将上述结论推广到无界可测函数 f．因此，今后如果没有特别的声明，所讨论的可测函数就不一定是有界函数．

4.4.1 引理 设$\mathfrak{M}$是集合Ω上的一个σ-代数，E是Ω上的单位分解，$f:\Omega\to\boldsymbol{C}$是可测函数．置

$$(1)\qquad \mathscr{D}_f=\left\{x\in H:\int_{\Omega}|f|^2dE_{x,x}<\infty\right\}.$$

这时，$\mathscr{D}_f$是H的一个稠密子空间，此外，如果$x\in H$，$y\in H$，那么

$$(2)\qquad \int_{\Omega}|f|\,d|E_{x,y}|\leqslant\|y\|\left\{\int_{\Omega}|f|^2dE_{x,x}\right\}^{1/2};$$

如果f是有界函数，又$v=\psi(f)z$，那么

(3) $dE_{x,v} = f\,dE_{x,z} \qquad (x \in H,\ z \in H).$

证 如果 $z = x + y$，又 $\omega \in \mathfrak{M}$，那么

$$\|E(\omega)z\|^2 \leqslant (\|E(\omega)x\| + \|E(\omega)y\|)^2$$
$$\leqslant 2\|E(\omega)x\|^2 + 2\|E(\omega)y\|^2,$$

亦即

(4) $E_{z,z}(\omega) \leqslant 2E_{x,x}(\omega) + 2E_{y,y}(\omega).$

因此$\mathscr{D}_f$对于加法运算是封闭的，纯量乘法更容易验证。所以$\mathscr{D}_f$是H的一个子空间。

再取 $\omega_n = \{p \in \Omega : |f(p)| < n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。如果 $x \in \mathscr{R}(E(\omega_n))$，那么对于任何$\omega \in \mathfrak{M}$来说，都有

(5) $E(\omega)x = E(\omega)E(\omega_n)x = E(\omega \cap \omega_n)x,$

因此

(6) $E_{x,x}(\omega) = E_{x,x}(\omega \cap \omega_n),$

从而得出

(7) $\displaystyle\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} = \int_{\omega_n} |f|^2 dE_{x,x} \leqslant n^2 \|x\|^2 < \infty.$

于是$\mathscr{R}(E(\omega_n)) \subset \mathscr{D}_f$。任取$y \in H$，因为 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$，而 $\omega \mapsto E(\omega)y$ 的可列可加性蕴涵 $y = \lim E(\omega_n)y$，所以y含于$\overline{\mathscr{D}_f}$之内。这就是说，$\mathscr{D}_f$是H的一个稠密子空间。

以下我们先就Ω上的有界函数f求证（2）式。任取$x \in H$，$y \in H$，由测度论中的 Radon—Nikodym 定理可知，在Ω上将有一个可测函数u，$|u| = 1$ 并且

(8) $u f\,dE_{x,y} = |f|\,d|E_{x,y}|.$

因而

(9) $\displaystyle\int_\Omega |f|\,d|E_{x,y}| = (\psi(uf)x, y)$

$$\leqslant \|\psi(uf)x\|\,\|y\|.$$

应用定理 3．2．4，可以得到

(10) $$\|\psi(uf)x\|^2=\int_\Omega |uf|^2 dE_{x,x} = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}.$$

现在，对于有界函数 f 来说，由（9）与（10）就能推出（2）式。然后，（2）式本身表明它也适用于一般的可测函数。

最后，我们说（3）式能够成立；因为，对每个有界可测函数 g 应用定理 3.2.4，都有

$$\int_\Omega g dE_{x,v}=(\psi(g)x,v)=(\psi(g)x,\psi(f)z)$$
$$=(\psi(\bar f)\psi(g)x,z)=(\psi(\bar f g)x,z)$$
$$=\int_\Omega g\bar f dE_{x,z}.$$ □

4.4.2 定理 设 E 是集合 Ω 上的一个单位分解。

（a）每个可测函数 $f:\Omega\to \mathbf{C}$ 都对应于一个稠密定义的闭算子 $\psi(f)$，其定义域 $\mathscr{D}(\psi(f))=\mathscr{D}_f$，这个算子由下式定义：

（1） $$(\psi(f)x,y)=\int_\Omega f dE_{x,y} \qquad (x\in\mathscr{D}_f, y\in H),$$

并且它还满足

（2） $$\|\psi(f)x\|^2=\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \qquad (x\in\mathscr{D}_f).$$

（b）上述算子的乘法定理成立．具体地说就是：如果 f 与 g 都是可测函数，那么将有

（3） $$\psi(f)\psi(g)\subset\psi(fg)$$

以及

（4） $$\mathscr{D}(\psi(f)\psi(g))=\mathscr{D}_g\cap\mathscr{D}_{fg}.$$

因此，$\psi(f)\psi(g)=\psi(fg)$ 当且仅当 $\mathscr{D}_{fg}\subset\mathscr{D}_g$。

（c）每个可测函数 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 都有

（5） $$\psi(f)^*=\psi(\bar f)$$

以及

(6) $\qquad \psi(f)\psi(f)^* = \psi(|f|^2) = \psi(f)^*\psi(f)$。

(*d*) 对于可测函数$f:\Omega\to\mathbf{C}$来说，$f\in L^\infty(E)$ 的充分必要条件是 $\mathscr{D}_f = H$。

证 (*a*) 如果 $x\in\mathscr{D}_f$，那么$y\mapsto\int_\Omega dE_{x,y}$是$H$空间上的一个有界共轭线性泛函，由引理4.4.1知其范数不超过$\left\{\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}\right\}^{1/2}$。应用定理3.1.5就能肯定有唯一的 $\psi(f)x\in H$ 存在，对于任何$y\in H$，（1）式都成立；并且

(7) $\qquad \|\psi(f)x\|^2 \leqslant \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \qquad (x\in\mathscr{D}_f)$.

由于$E_{x,y}$就x而言是线性的，因而（1）式成立时$\psi(f)$在$\mathscr{D}_f$上也是线性的。

对各个f作出它的截段$f_n = f\phi_n$，其中的

$$\phi_n(p) = \begin{cases} 1, & \text{若}|f(p)|\leqslant n, \\ 0, & \text{若}|f(p)|>n. \end{cases}$$

这时$\mathscr{D}_{f-f_n} = \mathscr{D}_f$；而$f_n$都是有界函数，因此根据控制收敛定理，（7）式表明：任何$x\in\mathscr{D}_f$都有

(8) $\qquad \|\psi(f)x - \psi(f_n)x\|^2 \leqslant \int_\Omega |f-f_n|^2 dE_{x,x} \to 0$

$(n\to\infty)$。

由于定理3.2.4已经保证有界函数f_n使（2）式成立，现在利用（8）式和极限方法就能证明（2）式对一切可测函数成立。

至于$\psi(f)$是闭算子，只须稍后证明了（5）式，将其中的f换成$\bar{f}$，再应用定理4.2.2的（*b*）即得。因此可以认为(*a*)已经证完。

为了求证（*b*），首先考虑f为有界函数的特款。这时$\mathscr{D}_f\subset\mathscr{D}_g$。如果$z\in H$，$v=\psi(\bar{f})z$，根据引理4.4.1和定理3.2.4有

$$(\psi(f)\psi(g)x,z)=(\psi(g)x,\psi(\bar{f})z)=(\psi(g)x,v)$$

$$=\int_\Omega g dE_{x,v}=\int_\Omega fg dE_{x,z}$$

$$=(\psi(fg)x,z),$$

因而

$$(9)\qquad \psi(f)\psi(g)x=\psi(fg)x \qquad (x\in\mathscr{D}_g,\ f\in L^\infty(E)).$$

记$y=\psi(g)x$，由（9）式和（2）式可以得到换算公式

$$(10)\qquad \int_\Omega |f|^2 dE_{y,y}=\int_\Omega |fg|^2 dE_{x,x}\ (x\in\mathscr{D}_g, f\in L^\infty(E)).$$

然后，设f为任意的可测函数（即可能无界）．由于（10）式适用于一切$f\in L^\infty(E)$，它对于所有的可测函数也都应当成立．因为$\mathscr{D}(\psi(f)\psi(g))$是由一切能使$y\in\mathscr{D}_f$的$x\in\mathscr{D}_g$组成的集，又因为（10）式表明$y\in\mathscr{D}_f$当且仅当$x\in\mathscr{D}_{fg}$，所以我们知道

$$(11)\qquad \mathscr{D}(\psi(f)\psi(g))=\mathscr{D}_g\cup\mathscr{D}_{fg}.$$

如果$x\in\mathscr{D}_g\cap\mathscr{D}_{fg}$且$y\in\psi(g)x$，并且像在求证（$a$）时那样作出$f$的截段$f_n$，那么，在$L^2(E_{y,y})$内将有

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{y,y}=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n|^2 dE_{y,y};$$

在$L^2(E_{x,x})$内将有

$$\int_\Omega |fg|^2 dE_{x,x}=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n g|^2 dE_{x,x}.$$

现在，将（9）式中的f用f_n替换，再结合（2）式就可以推知

$$(\psi f)\psi(g)x=\psi(f)y=\lim_{n\to\infty}\psi(f_n)y$$

$$=\lim_{n\to\infty}\psi(f_n g)x=\psi(fg)x.$$

至此（b）证讫．

（c）设f是一般的可测函数，f_n是它的截段，如果$x\in\mathscr{D}_f$ $y\in\mathscr{D}_{\bar{f}}=\mathscr{D}_f$，由（8）和定理3.2.4可以得到

$$(\psi(f)x,y)=\lim_{n\to\infty}(\psi(f_n)x,y)=\lim_{n\to\infty}(x,\psi(\bar{f}_n)y)$$

$$=(x_n,\psi(\bar{f})y).$$

这表明$y\in\mathscr{D}(\psi(f)^*)$，因而有

(12) $\quad\psi(\bar{f})\subset\psi(f)^*.$

这时，为了求证（5）式，只须得出与（12）式相反的包含关系。任取$z\in\mathscr{D}(\psi(f)^*)$，置$v=\psi(f)^*z$。由于$f_n\doteq f\phi_n$，乘法定理给出

(13) $\quad\psi(f_n)=\psi(f)\psi(\phi_n).$

注意到$\psi(\phi_n)$是自伴算子，由定理4.1.2和定理3.2.4可知

$$\psi(\phi_n)\psi(f)^*\subset[\psi(f)\psi(\phi_n)]^*=\psi(f_n)^*=\psi(\bar{f}_n),$$

因而

(14) $\quad\psi(\phi_n)v=\psi(\bar{f}_n)z \qquad (n=1,2,\cdots).$

由于$|\phi_n|\leqslant 1$，所以（14）式与（2）式蕴涵

(15) $\quad\displaystyle\int_\Omega |f_n|^2dE_{z,z}=\int_\Omega |\phi_n|^2dE_{v,v}\leqslant E_{v,v}(\Omega) \quad (n=1,2,\cdots).$

这就是说$z\in\mathscr{D}_f$。于是（5）式得证。

现在，利用乘法定理就可以从（5）式得到（6）式，因为有$\mathscr{D}_{ff}\subset\mathscr{D}_f$.

（d）我们先证充分性。设$\mathscr{D}_f=H$，由于$\psi(f)$是一个闭算子，因而闭图象定理蕴涵$\psi(f)\in\mathscr{B}(H)$.取f的截段$f_n=f\phi_n$，因为

$$\|\psi(\phi_n)\|=\|\phi_n\|_\infty\leqslant 1,$$

所以由乘法定理与定理3.2.4可以出得

$$\|f_n\|_\infty=\|\psi(f_n)\|=\|\psi(f)\psi(\phi_n)\|\leqslant\|\psi(f)\|$$

进而有$\|f\|_\infty\leqslant\|\psi(f)\|$以及$f\in L^\infty(E)$.

至于$f\in L^\infty(E)$的必要条件为$\mathscr{D}_f=H$，已蕴涵在定理3.2.4中。 □

注 如果g有界，则$\mathscr{D}_g=H$，因此恒有$\mathscr{D}_{fg}\subset\mathscr{D}_g$，从而$\psi(f)\psi(g)=\psi(fg)$。我们在求证（13）式时曾经用到这一事实。借助它还能证明

(16) $\quad\psi(g)\psi(f)\subset\psi(f)\psi(g),$

因为$\psi(g)\psi(f)\subset\psi(gf)=\psi(fg)$。如果$g$是可测集$\omega\subset\Omega$上的特征函数，那么（16）式将变成

$$(17)\qquad E(\omega)\psi(f)\subset\psi(f)E(\omega).$$

任取$x\in\mathscr{D}_f\cap\mathscr{R}(E(\omega))$，将有

$$(18)\qquad E(\omega)\psi(f)x=\psi(f)E(\omega)x=\psi(f)x.$$

这表明，$\psi(f)$将$\mathscr{D}_f\cap\mathscr{R}(E(\omega))$映入$\mathscr{R}(E(\omega))$之内。

以上内容类似于§3.3.6对不变子空间的讨论。

4.4.3 定义

H空间内的线性算子T的**预解集**是由下述$\lambda\in\boldsymbol{C}$组成的集：$T-\lambda I$是$\mathscr{D}(T)$到H上的一一映射，其逆映射属于$\mathscr{B}(H)$。

换句话说，$T-\lambda I$须有一个逆算子$S\in\mathscr{B}(H)$，满足条件

$$S(T-\lambda I)\subset(T-\lambda I)S=I.$$

例如，由定理4.2.5的（a）可知：如果T是H空间内稠密定义的闭算子，那么T^*T的预解集内将含有数-1。

算子T的谱$\sigma(T)$仍定义为T的预解集的补集，这与对待有界算子的做法是一致的。

我们将继续讨论定理4.4.2中利用单位分解E作出的由可测函数f确定的算子$\psi(f)$，发现它的谱$\sigma(\psi(f))$就是f的本质值域。这个十分简洁的结论乃是下面的定理的最后结果。

4.4.4 定理 设E是集合Ω上的一个单位分解，$f:\Omega\to\boldsymbol{C}$是可测函数，又

$$\omega_\alpha=\{p\in\Omega;f(p)=\alpha,\alpha\in\boldsymbol{C}\}.$$

（a）如果α在f的本质值域内，并且$E(\omega_\alpha)\neq0$，那么$\psi(f)-\alpha I$不是一对一的。

（b）如果α在f的本质值域内，但是$E(\omega_\alpha)=0$，那么$\psi(f)-\alpha I$是$\mathscr{D}_f$到H的一个稠密真子空间上的一一映射，并且存在这样的向量$x_n\in H$：诸$\|x_n\|=1$，且使

$$\lim_{n\to\infty}[\psi(f)x_n-\alpha x_n]=0.$$

（c）$\sigma(\psi(f))$就是f的本质值域。

证 显然，证明过程中取$\alpha=0$并不影响一般性。

（a）如果$E(\omega_0)\neq 0$，那么存在$x_0\in\mathscr{R}(E(\omega_0))$，$\|x_0\|=1$。设$\phi_0$是$\omega_0$的特征函数。由于$f\phi_0=0$，因而利用乘法定理可以得到$\psi(f)\psi(\phi_0)=0$。但是$\psi(\phi_0)=E(\omega_0)$，所以

$$\psi(f)x_0=\psi(f)E(\omega_0)x_0=\psi(f)\psi(\phi_0)x_0=0.$$

（b）按照题设条件，有$E(\omega_0)=0$；但是对$n=1,2,\cdots$定义

$$\omega_n=\left\{p\in\Omega:|f(p)|<\frac{1}{n}\right\},$$

有$E(\omega_n)\neq 0$。选取$x_n\in\mathscr{R}(E(\omega_n))$使$\|x_n\|=1$，记$\omega_n$的特征函数为$\phi_n$。仍用求证（$a$）时用过的论点，可得

$$\|\psi(f)x_n\|=\|\psi(f\phi_n)x_n\|\leqslant\|\psi(f\phi_n)\|$$

$$=\|f\phi_n\|_\infty\leqslant\frac{1}{n}.$$

于是，虽然$\|x_n\|=1$，$n\to\infty$时都有$\psi(f)x_n\to 0$。

如果有某个$x\in\mathscr{D}_f$使$\psi(f)x=0$，那么

$$\int_\Omega|f|^2dE_{x,x}=0.$$

由于$|f|>0$ a.e.$[E_{x,x}]$，因而必须是$E_{x,x}(\Omega)=0$。但是$E_{x,x}(\Omega)=\|x\|$，这就得出$x=0$。所以$\psi(f)$是一对一的。

显然，$\psi(f)^*=\psi(\bar{f})$也是一对一的。如果$y\perp\mathscr{R}(\psi(f))$，那么$x\mapsto(\psi(f)x,y)=0$在$\mathscr{D}_f$内连续，因而$y\in\mathscr{D}(\psi(f)^*)$，并且

$$(x,\psi(\bar{f})y)=(\psi(f)x,y)=0\qquad(x\in\mathscr{D}_f).$$

这时可由$\psi(\bar{f})y=0$推知$y=0$，从而证得$\mathscr{R}(\psi(f))$在H空间内稠密。

由于$\psi(f)$是闭算子，因此$\psi(f)^{-1}$也是闭算子。假如$\mathscr{R}(\psi(f))$充满H空间，那么闭图象定理蕴涵$\psi(f)^{-1}\in\mathscr{B}(H)$。但是，从前面能够构造出序列$\{x_n\}$可知这是不可能的。因此$\mathscr{R}(\psi(f))$是$H$的一个真子空间。

（c）从（a）和（b）已知，f的本质值域是$\sigma(\psi(f))$的

一个子集。下面再求出相反的包含关系。

假定 0 不在 f 的本质值域中，那么 $g=1/f \in L^\infty(E)$，$fg=1$。因而$\psi(f)\psi(g)=\psi(1)=I$。这表明$\mathscr{R}(\psi(f))=H$，于是，由闭图象定理得知有$\psi(f)^{-1} \in \mathscr{B}(H)$。 □

借用有界算子的术语（参看第 3 章习题17），我们可以说 (a) 款的α含于$\psi(f)$的**点谱**中。而（b）款的α含于 $\psi(f)$ 的**连续谱**中。有时（b）款陈述为：α是$\psi(f)$的一个**近似特征值**。

下面是所谓的测度更换原理。

4.4.5 定理 设

（a）$\mathfrak{M}$与$\mathfrak{M}'$分别为Ω与Ω'的σ-代数；

（b）$E:\mathfrak{M}\to\mathscr{B}(H)$是一个单位分解；

（c）$\phi:\Omega\to\Omega'$具有这样的性质：每个$\omega' \in \mathfrak{M}'$都有$\phi^{-1}(\omega') \in \mathfrak{M}$。

这时，如果$E'(\omega')=E(\phi^{-1}(\omega'))$，那么$E':\mathfrak{M}'\to\mathscr{B}(H)$ 也是一个单位分解；任何$\mathfrak{M}'$-可测函数f：$\Omega'\to\mathbf{C}$ 在Ω'上的积分与$f\circ\phi$在Ω上的积分都存在，并且相等

$$(1) \qquad \int_{\Omega'} f dE'_{x,y}=\int_{\Omega}(f\circ\phi)dE_{x,y}.$$

证 当f为特征函数时，（1）式可以看作E'的定义：因而，（1）式对于简单函数必能成立。然后很容易将它推广到一般可测函数。

至于求证 E' 也是一个单位分解，只须直接验证它具有定义3.2.1中的各个性质即可。 □

4.5 谱定理

对于无界算子来说，可以定义：

H空间内稠密定义的闭算子 T 称为**正规算子**，如果$T^*T=TT^*$。

例如，定理 4.4.2中的（6）式表明，$\psi(f)$ 是一个正规

算子。

定理 3．3．2 曾经指出，有界的正规算子能够借助于在它们的谱上的单位分解来表示。实际上，无界正规算子也有相同的结论。本节的主要目的就是要证明这一事实。

4.5.1 定理 H空间内的任何自伴算子A，都存在其唯一的在实数轴的Borel子集上的单位分解E，当$x\in\mathscr{D}(A)$，$y\in H$时恒有

$$(1)\qquad (Ax,y)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_{x,y}(t).$$

而且，单位分解E是集中在$\sigma(A)\subset(-\infty,\ \infty)$上的，这就是说$E(\sigma(A))=I$。

这个单位分解E也将称为A的谱分解。

证 设U是A的Cayley变换，由于A是自伴算子，所以U是酉算子；$\|U\|=1$，$\sigma(U)$位于单位圆上。作出U的谱分解E'。将删除了点1的单位圆记作Ω。注意到$I-U$是一对一的，由定理3.4.2的（b）知道$E'(\{1\})=0$，因此

$$(2)\qquad (Ux,y)=\int_{\Omega} \lambda E'_{x,y}(\lambda)\qquad (x\in H,\ y\in H).$$

定义

$$(3)\qquad f(\lambda)=i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\qquad (\lambda\in\Omega).$$

应用定理 4．4．2 来确定$\psi(f)$时，只须将其中的E换成上述的E'，得到

$$(4)\qquad (\psi(f)x,y)=\int_{\Omega} f\,dE'_{x,y}\qquad (x\in\mathscr{D}_f,\ y\in H).$$

由于$f(\lambda)$是实值函数，所以$\psi(f)$是自伴算子（定理 4.4.2）；又因为$f(\lambda)(1-\lambda)=i(1+\lambda)$，乘法定理将给出

$$(5)\qquad \psi(f)(I-U)=i(I+U).$$

特别是，（5）式蕴涵$\mathscr{R}(I-U)\subset\mathscr{D}(\psi(f))$。另一方面，由定理4.3.3可得

(6)　　$A(I-U)=i(I+U)$,

以及$\mathscr{D}(A)=\mathscr{R}(I-U)\subset\mathscr{D}(\psi(f))$。这时，对(5)、(6)两式进行比较，就看出$\psi(f)$是自伴算子$A$的一个自伴扩张。按照定理4.2.6所说的，应当是$A=\psi(f)$。因此

(7)　　$(Ax,y)=\int_{\Omega} f dE'_{x,y}$　　$(x\in\mathscr{D}(A),\ y\in H)$,

根据定理4.4.4的(c)，$\sigma(A)$就是$f(\lambda)$的本质值域，所以$\sigma(A)\subset(-\infty,\ \infty)$。注意到$f$在$\Omega$内是一对一的，如果对每个Borel集$\omega\subset\Omega$定义

(8)　　$E(f(\omega))=E'(\omega))$,

那么，我们就得到了所期望的单位分解E，并且将(7)式变换后即得求证的(1)式。

上述由(2)式推导出(1)式的过程利用了Cayley变换；反之，借助Cayley变换的逆变换也可以由(1)式推导出(2)式。因此，表示式(2)所用的单位分解E'的唯一性也将保证表示式(1)中的单位分解E的唯一性。 □

以下有关自伴算子与正算子的讨论显然是§3.5中某些内容的推广。因为有了定理4.5.1，现在能够对自伴算子应用定理4.4.2中那一套方法。我们约定：如果对于任何$x\in\mathscr{D}(A)$，都有$(Ax,x)\geqslant 0$，就简写为$A\geqslant 0$。

4.5.2 定理　设A是H空间内的一个自伴算子。

(a) $A\geqslant 0$当且仅当$\sigma(A)\subset[0,\infty)$。

(b) 如果$A\geqslant 0$，那么存在唯一的自伴算子$B\geqslant 0$使得$B^2=A$。

证　(a)的证法类似定理3.5.2，故从略。下面来求证(b)。

设$A\geqslant 0$。这时$\sigma(A)\subset[0,\infty)$，并且有

(1)　　$(Ax,y)=\int_0^{\infty} t dE_{x,y}(t)$　　$(x\in\mathscr{D}(A),\ y\in H)$,

其中 $\mathscr{D}(A)=\{x\in H:\int t^2dE_{x,y}(t)<\infty\}$，积分区域是$[0,\infty)$，设 $s(t)$为$t\geqslant 0$的非负平方根，再置$B=\psi(s)$，显然

$$(2)\qquad (B)x,y=\int_0^\infty s(t)dE_{x,y}(t)\qquad (x\in\mathscr{D}_s,\ y\in H).$$

现在，应用定理 4.4.2 的（b），并且取其中的 $f=g=s$，就得到$B^2=A$；因为 s 是实数，由定理4.4.2的（c）可知B是自伴算子；再注意到$s(t)\geqslant 0$，那么只须在（2）式中取 $x=y$，立即看出$B\geqslant 0$。

为了证明B是唯一的，可以再取自伴算子 $C\geqslant 0$，它也满足 $C^2=A$, E^C是C的谱分解。这时，有

$$(3)\qquad (Cx,y)=\int_0^\infty sdE^C{}_{x,y}(s)\qquad (x\in\mathscr{D}(C),\ y\in H).$$

应用定理 4.4.5，取其中的 $\Omega=[0,\infty)$, $\phi(s)=s^2$, $f(t)=t$；以及

$$(4)\qquad E'(\phi(\omega))=E^C(\omega)\qquad (\omega\subset[0,\infty)).$$

这时可得

$$(5)\qquad (Ax,y)=(C^2x,y)=\int_0^\infty s^2dE^C{}_{x,y}(s)$$

$$=\int_0^\infty tdE'{}_{x,y}(t).$$

现在，比较（1）式与（5）式，即可由定理 4.5.1 中证明了的单位分解的唯一性得知$E'=E$。按照（4）式，E将确定 E^C；因而E将确定算子C。 □

4.5.3 定理 如果N是H空间内的一个正规算子，那么

（a）$\mathscr{D}(N)=\mathscr{D}(N^*)$；

（b）$\|Nx\|=\|N^*x\|\qquad (x\in\mathscr{D}(N))$；

（c）N是极大正规的。

证 如果$y\in\mathscr{D}(N^*N)=\mathscr{D}(NN^*)$，那么，因为$Ny\in\mathscr{D}(N^*)$，将有$(Ny,Ny)=(y,N^*Ny)$；又因为$N^*y\in\mathscr{D}(N)$以及$N=N^{**}$，还应当有$(N^*y,N^*y)=(y,NN^*y)$。由于$N^*N=NN^*$，因而$y\in\mathscr{D}(N^*N)$时就有

(1) $\qquad \|Ny\|=\|N^*y\|$

成立。

然后，取$x\in\mathscr{D}(N)$。记N在$\mathscr{D}(N^*N)$上的限制为N'。根据定理4.2.5的(b)，我们知道$\{x,Nx\}$在$\mathscr{G}(N')$的闭包之内。因而，有向量$y_i\in\mathscr{D}(N^*N)$使得$i\to\infty$时

(2) $\qquad \|y_i-x\|\to0$,

(3) $\qquad \|Ny_i-Nx\|\to0$。

按照(1)式，$\|N^*y_i-N^*y_j\|=\|Ny_i-Ny_j\|$。因此(3)式蕴涵$\{N^*y_i\}$是$H$空间内的一个Cauchy序列。于是，存在$z\in H$，当$i\to\infty$时

(4) $\qquad \|N^*y_i-z\|\to0$。

由于N^*是一个闭算子，所以(2)式与(4)式蕴涵$\{x,z\}\in\mathscr{G}(N^*)$。

由上述结果首先可以推知$x\in\mathscr{D}(N^*)$，因而得到$\mathscr{D}(N)\subset\mathscr{D}(N^*)$；其次是有

(5) $\|N^*x\|=\|z\|=\lim\|N^*y_i\|=\lim\|Ny_i\|=\|Nx\|$.

现在，已经证明了(b)和(a)的一半。为了证完(a)，只须注意到，由$N^{**}=N$可以推知N^*也是正规算子，因此

(6) $\qquad \mathscr{D}(N^*)\subset\mathscr{D}(N^{**})=\mathscr{D}(N)$。

最后来证明(c)。假定有正规算子M满足条件$N\subset M$，那么应当有$M^*\subset N^*$；从而推出

(7) $\qquad \mathscr{D}(M)=\mathscr{D}(M^*)\subset\mathscr{D}(N^*)=\mathscr{D}(N)\subset\mathscr{D}(M)$,

也就是$\mathscr{D}(M)=\mathscr{D}(N)$。因此$M=N$。 □

4.5.4 定理 H空间内的任何正规算子N都有其唯一的谱分解E，它使得

（1） $(Nx,y)=\int_{\sigma(N)}\lambda E_{x,y}(\lambda)\qquad (x\in\mathscr{D}(N),y\in H)$

成立。

而且，对于任何Borel集$\omega\subset\sigma(N)$和任何$S\in\mathscr{B}(H)$，如果S与N交换，意即$SN\subset NS$，那么就有$E(\omega)S=SE(\omega)$。

由（1）式和定理4.4.2的注，还可以得出$E(\omega)N\subset NE(\omega)$.

证 证明的叙述较长，将分成几个段落。

第一个目标是构造自伴射影算子P_i，它们有彼此正交的值域；且使$P_iN\subset NP_i\in\mathscr{B}(H)$，$NP_i$是正规算子，以及任何$x\in H$都有$x=\Sigma P_ix$。这个目标一旦实现，则关于有界正规算子的谱定理将能应用于算子NP_i，从而导出所期待的结果。

对正规算子N应用定理4.2.5，知其存在$B\in\mathscr{B}(H)$和$C\in\mathscr{B}(H)$，满足条件：$\|B\|\leqslant 1$，$B\geqslant 0$；$C=NB$ 以及

（2） $B(I+N^*N)\subset I=(I+N^*N)B.$

由于$N^*N=NN^*$，（2）式蕴涵

（3） $BN=BN(I+N^*N)B=B(I+N^*N)NB$
$\subset NB=C.$

因而可得$BC=B(NB)=(BN)B\subset CB$. 但因B与C都是有界算子，所以$BC=CB$；从而由§3.3.3可知C将与B的任何有界Borel函数交换。

选取$\{t_i\}$，使其满足条件$1=t_0>t_1>t_2\cdots$；$\lim t_i=0$。设p_i为$(t_i,t_{i-1}]$的特征函数，$i=1,2,\cdots$；再置$f_i(t)=p_i(t)/t$。各个f_i皆是$\sigma(B)\subset[0,1]$上的有界函数。设E^B是B的谱分解。等式（2）则表明B是一对一的，亦即，0不在B的点谱之内。因此$E^B(\{0\})=0$，而且E^B集中在$(0,1]$内。

定义

（4） $P_i=p_i(B)\qquad (i=1,2,\cdots).$

显然P_i有以下性质：由于p_i是实值函数，因而P_i是自伴算子；而乘法原理又表明P_i是射影算子；注意到$i\neq j$时$p_ip_j=0$，就知道

P_i的值域彼此正交；又因为Σp_i是(0,1]的特征函数，所以

(5) $$\sum_{i=1}^{\infty} P_i x = E^B((0,1])x = x \qquad (x \in H).$$

因为$p_i(t) = tf_i(t)$，故

(6) $$NP_i = NBf_i(B) = Cf_i(B) \in \mathscr{B}(H);$$

再由（3）式可得$P_iN = f_i(B)BN \subset f_i(B)C$，所以

(7) $$P_iN \subset NP_i.$$

由（6）式可知$\mathscr{D}(NP_i) = H$，因此

(8) $$\mathscr{R}(P_i) \subset \mathscr{D}(N) \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

如果$P_ix = x$，那么（7）式蕴涵 $P_iNx = NP_ix = Nx$。这表明算子N将$\mathscr{R}(P_i)$变换成$\mathscr{R}(P_i)$，或者说，$\mathscr{R}(P_i)$是N的一个不变子空间。

接下来，我们将证明各个NP_i都是正规算子。先由（7）式和定义4.1.1可知

(9) $$(NP_i)^* \subset (P_iN)^* = N^*P_i;$$

但因$NP_i \in \mathscr{B}(H)$，故$\mathscr{D}((NP_i)^*) = H$；于是

(10) $$(NP_i)^* = N^*P_i.$$

现在，根据（8）式和（10）式以及定理4.5.3就能得出

(11) $$\|NP_ix\| = \|N^*P_ix\| = \|(NP_i)^*x\| \qquad (x \in H).$$

按照定理3.1.12的（a），(11)式蕴涵NP_i为正规算子。

至此，(5)，(6)，(7)诸式表明我们已经实现了预定的第一个目标。

第二个目标是找到所需要的单位分解并证明（1）式。

由定理3.3.2知，各个NP_i都有其定义在$\boldsymbol{C}$的Borel子集上的谱分解E^i。

前面已经指出算子N将$\mathscr{R}(P_i)$变换为$\mathscr{R}(P_i)$，另外，P_i与NP_i交换。于是，对于任何Borel集$\omega \subset \boldsymbol{C}$，$E^i(\omega)$均与$P_i$交换，因此

(12) $$E^i(\omega)P_ix = P_iE^i(\omega)x \in \mathscr{R}(P_i) \quad (x \in H, i = 1, 2, \cdots).$$

由于这些值域彼此正交，又因为（5）式蕴涵

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\|E^i(\omega)P_ix\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\|P_ix\|^2=\|x\|^2,$$

这表明级数 $\Sigma E^i(\omega)P_ix$ 在 H 空 间 内 依 范 数收敛；所以对一切 Borel集 $\omega\subset\boldsymbol{C}$ 定义

$$(14)\qquad E(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}E^i(\omega)P_i$$

是合理的。

容易验证 E 是一个单位分解．根据定理 4．4．2，有一个正规算子 M，由

$$(15)\qquad (Mx,y)=\int\lambda dE_{x,y}(\lambda)\qquad (x\in\mathscr{D}(M),y\in H)$$

定义，其积分区域为 $\boldsymbol{C}$，并且

$$(16)\qquad \mathscr{D}(M)=\{x\in H:\ \int|\lambda|^2dE_{x,x}(\lambda)<\infty\}.$$

现在，只须指出 $M=N$，(1) 式就得到了证明。

为此，任取 $x\in H$，记 $x_i=P_ix$，则由 (14) 式可以推知

$$(17)\qquad E_{x,x}(\omega)=\|E(\omega)x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|E^i(\omega)P_ix\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E^i{}_{x_i,x_i}(\omega).$$

如果 $x\in\mathscr{D}(N)$，那么 $P_iNx=NP_ix$，因此

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\int|\lambda|^2dE^i{}_{x_i,x_i}(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\|NP_ix\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\|P_iNx\|^2=\|Nx\|^2.$$

由 (17) 与 (18) 可知，(16) 中的积分对于每个 $x\in\mathscr{D}(N)$ 来说都是有限值，因而

$$(19)\qquad \mathscr{D}(N)\subset\mathscr{D}(M).$$

如果 $x\in\mathscr{R}(P_i)$，那么 $x=P_ix$，还有 $E(\omega)x=E^i(\omega)x$；于

是任何$y\in H$都能使$E_{x,y}=E^i_{x,y}$。因此

$$(Nx,y)=(NP_ix,y)=\int\lambda dE^i_{x,y}(\lambda)$$

$$=\int\lambda dE_{x,y}(\lambda)=(Mx,y).$$

随之又有

(20) $\quad P_iNx=NP_ix=MP_ix \quad (x\in\mathscr{D}(N), i=1,2,\cdots).$

设$Q_i=P_1+\cdots+P_i$，由上式可得$Q_iNx=MQ_ix$。所以

(21) $\quad \{Q_ix,Q_iNx\}\in\mathscr{G}(M) \quad (x\in\mathscr{D}(N),\ i=1,2,\cdots).$

因为$\mathscr{G}(M)$是闭集，所以由（5）式与（21）可知$\{x,Nx\}\in\mathscr{G}(M)$，亦即每个$x\in\mathscr{D}(N)$都有$Nx=Mx$。于是，(19)与定理4.5.3的（c）蕴涵$N=M$。

这时由（15）式即可得到表示式（1），只是其中的$\sigma(N)$用$\boldsymbol{C}$替代。其实，由定理4.4.4的（c）可知，E集中在$\sigma(N)$上。

还应当证明E的唯一性。为此可以考虑算子

(22) $\quad T=N(I+\sqrt{N^*N})^{-1},$

其中$\sqrt{N^*N}$是N^*N的唯一的正平方根。当（1）式成立时，根据定理4.4.2，将有

(23) $\quad T=\int\phi dE,$

其中$\phi(\lambda)=\lambda/(1+|\lambda|)$；因而$T\in\mathscr{B}(H)$；又由于$\phi$在$\boldsymbol{C}$上是一对一的，对于各个Borel集$\omega\subset\boldsymbol{C}$，定理4.4.5蕴涵$T$的谱分解$E^T$满足

(24) $\quad E(\omega)=E^T(\phi(\omega)).$

然后，根据定理3.3.2可得E^T的唯一性，相应地就有E的唯一性。

最后一件工作是讨论$E(\omega)$与$S\in\mathscr{B}(H)$的交换性，题设条件有S与N交换，意即$SN\subset NS$。

置$Q=Q_n=E(\tilde{\omega})$，其中$\tilde{\omega}=\{\lambda:|\lambda|<n\}$，而$n$是某个正整数。这时$NQ\in\mathscr{B}(H)$是正规算子，并且可由

(25) $$NQ=\int f dE$$

给出，其中的

$$f(\lambda)=\begin{cases}\lambda, & \lambda\in\tilde{\omega};\\ 0, & \lambda\overline{\in}\tilde{\omega}.\end{cases}$$

定理4.4.5蕴涵，NQ的谱分解E'满足$E'(\omega)=E(f^{-1}(\omega))$，或者

(26) $$\begin{cases}E'(\omega)=E(\omega\cap\tilde{\omega})=QE(\omega) & \text{如果}0\overline{\in}\omega;\\ E'(\{0\})=E(\{0\}\cup(\boldsymbol{C}-\tilde{\omega}))=E(\{0\})+I-Q.\end{cases}$$

因而，当$\omega\subset\tilde{\omega}$时将有

(27) $$E(\omega)=QE(\omega)=QE'(\omega).$$

由定理4.4.2可得$QN\subset NQ=QNQ$，因而有

(28) $$(QSQ)(NQ)=QSNQ\subset QNSQ\subset(NQ)(QSQ).$$

注意到$(QSQ)(NQ)\in\mathscr{B}(H)$，上面的包含关系实际上是等式. 于是，定理3.3.2蕴涵QSQ与各个$E'(\omega)$交换.

考虑ω为有界集的情况。这时，取n足够大以使$\omega\subset\tilde{\omega}$. 由(27)可得

$$QSE(\omega)=QSQE'(\omega)=E'(\omega)QSQ=E(\omega)SQ,$$

确切地说，上式两端相等意味着

(29) $$Q_nSE(\omega)=E(\omega)SQ_n\qquad(n=1,2,\cdots).$$

现在，由定理3.2.2可知，只要ω是有界集，在(29)式中让$n\to\infty$，就有

(30) $$SE(\omega)=E(\omega)S.$$

而且，即使ω是$\boldsymbol{C}$内的任意Borel集，(30)式也能成立.

□

4.6 算子半群

在数学分析中，曾经求出函数方程

$$f(s+t)=f(s)f(t)$$

的连续解是指数函数。将这个问题移植于算子：研究无穷维空间中的算子值函数方程

$$T(s+t)=T(s)T(t) \qquad (t,s\geqslant 0)$$

的解，就引出算子半群的理论。

本节将扼要地介绍算子半群的定义和性质，最后以经典性的有关Hilbert空间上单参数酉算子半群的 M.H.Stone 定理作为结束。

4.6.1 定义

设 $\{Q(t)\}$ 是 Banach 空间 X 上的一族有界线性算子，各个 $Q(t)$ 与 $t\in[0,\infty)$ 相联系，并且满足以下条件：

（ a ） $Q(0)=I$；

（ b ） 对于一切 $s,t\in[0,\infty)$，均有

$$Q(s+t)=Q(s)Q(t),$$

这样的算子族称为**单参数算子半群**。

算子半群 $\{Q(t)\}$ 满足**连续性条件**，意味着：

（ c ） 对于任何 $x\in X$，都有 $\lim\limits_{t\to 0}\|Q(t)x-x\|=0$。

如果条件（ b ）在加强为"对于一切 $s,t\in(-\infty,\infty)$"时仍能成立，则算子族 $\{Q(t)\}$ 称为**单参数算子群**。

注意到函数方程 $f(s+t)=f(s)f(t)$ 的连续解可以写成 $f(t)=\exp(At)$，因而 f 实质上是由数值 $A=f'(0)$ 确定。受到这个事实的启发，先将算子半群 $\{Q(t)\}$ 与算子 A_ε 联系起来：

$$（1）\qquad A_\varepsilon x=\frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)x-x] \qquad (x\in X,\varepsilon>0);$$

接着，再定义

$$（2）\qquad Ax=\lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon x;$$

这时，$x\in\mathscr{D}(A)$ 意味着极限（2）依照空间 X 的范数拓扑是存在的。$\mathscr{D}(A)$ 显然是 X 的一子个空间，所以 A 是 X 内的一个线性算子。

这个算子 A 实质上就是 $Q'(0)$，今后将称之为算子半群

$\{Q(t)\}$的无穷小生成算子.

下面的定理将要讨论算子半群的一些基本性质.

4.6.2 定理 如果Banach空间X上的算子半群$\{Q(t)\}$满足连续性条件，那么

(*a*) 对于任何$x\in X$来说，映射$t\mapsto Q(t)x$都是从半实轴$[0,\infty)$到Banach空间X内的连续映射；

(*b*) 无穷小生成算子A是X空间内的一个稠密定义的闭的线性算子；

(*c*) 与每个$x\in\mathscr{D}(A)$对应的$Q(t)x$都能满足微分方程

$$\frac{d}{dt}Q(t)x=AQ(t)x=Q(t)Ax;$$

(*d*) 对于任何$x\in X$来说，

$$Q(t)x=\lim_{\varepsilon\to 0}[\exp(tA_\varepsilon)]x$$

是在$[0,\infty)$的每个紧子集上的一致收敛.

值得注意的是，结论(*d*)对于一切$x\in X$都能成立，而不限于$x\in\mathscr{D}(A)$，此外(*d*)中的极限以及在(*c*)中写出导数而不言自明地用到的极限，都理解为依照X空间内的范数拓扑.

证 在证明定理之前，我们还要先做一些准备，指出若干有关满足连续性条件的算子半群的最简单的事实。

如果有一个数列$t_n\to 0$使得$\|Q(t_n)\|\to\infty$，那么，根据Banach—Steinhaus定理，将有$x\in X$，其$\{\|Q(t_n)x\|\}$无界；而这与连续性条件

(1) $\qquad \|Q(t)x-x\|\to 0 \qquad (t\to 0)$

相抵触。因此存在$\delta>0$与$\gamma_0<\infty$，使得$0\leqslant t\leqslant\delta$时

(2) $\qquad \|Q(t)\|\leqslant\gamma_0$

成立。置$\gamma=\sup\{\|Q(s)\|:0\leqslant s\leqslant 1\}$，由泛函方程

(3) $\qquad Q(s+t)=Q(s)Q(t)$

可以看出，(2)式蕴涵$\gamma<\infty$。而且，还有$\gamma\geqslant 1$；以及

(4) $\qquad \|Q(t)\|\leqslant\gamma^{1+t} \qquad (0\leqslant t<\infty)$，

这是因为，如果$n\leqslant t<n+1$，那么$Q(t)=Q(1)^nQ(t-n)$.

将（4）式应用于

$$\exp(tA_\varepsilon)=e^{-t/\varepsilon}\exp\left[\frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon)\right]$$

$$=e^{-t/\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n Q(n\varepsilon)}{n!\ \varepsilon^n},$$

可以得出

$$\|\exp(tA_\varepsilon)\|\leqslant e^{-t/\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\gamma^{1+n\varepsilon}}{n!\ \varepsilon^n}$$

$$=\gamma\exp\left(t\frac{\gamma^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right).$$

如果 $0<\varepsilon\leqslant1$，那么 $\gamma^\varepsilon-1\leqslant\varepsilon(\gamma-1)$；因而有

（5） $\|\exp(tA_\varepsilon)\|\leqslant\gamma\exp(t\gamma)\quad(0<\varepsilon\leqslant1,0\leqslant t<\infty)$.

下面依次求证定理的各款。

（a）如果 $x\in X$，任取 $\varepsilon>0$，连续性条件表明存在这样的 $\eta=\eta(x,\varepsilon)>0$，只要 $0\leqslant t\leqslant\eta$，就能使 $\|Q(t)x-x\|<\varepsilon$. 因此 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+\eta\leqslant n$时，由（4）式可以得到

$$\|Q(t)x-Q(s)x\|=\|Q(s)[Q(t-s)x-x]\|$$

$$\leqslant\|Q(s)\|\ \|Q(t-s)x-x\|\leqslant\gamma^{n+1}\varepsilon.$$

（b）注意到结论（a）使我们能够定义一个X-值积分

（6） $M_t x=\frac{1}{t}\int_0^t Q(s)xds\qquad(x\in X,t>0)$.

由（4）式可知 $M_t\in\mathscr{B}(H)$，而且 $\|M_t\|\leqslant\gamma^{1+t}$. 此外，还可以证明$M_t$与定义4.6.1中的$A_\varepsilon$之间有恒等式

（7） $A_\varepsilon M_t=A_t M_\varepsilon\qquad(\varepsilon>0,t>0)$

成立。

这是因为，可以将关系式

$$\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^{t+\varepsilon}=\int_0^t+\int_t^{t+\varepsilon}$$

改写为

(8) $\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon}-\int_{0}^{t}=\int_{t}^{t+\varepsilon}-\int_{0}^{\varepsilon}$,

然后置入被积函数$Q(s)xds$；这时，利用（3）式，（8）式的左端将变成

$$\int_{0}^{t}[Q(\varepsilon+s)-Q(s)]xds$$

$$=[Q(\varepsilon)-I]\int_{0}^{t}Q(s)xds=\varepsilon A_{\varepsilon}tM_{t};$$

而（8）式的右端将变成$tA_{t}\varepsilon M_{\varepsilon}$。因此证得（7）式。

由（6）式可知，任何$x\in X$都有$\lim\limits_{t\to 0}M_{t}x=x$。注意到$t>0$时$A_{t}\in\mathscr{B}(X)$，（7）式将给出

(9) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_{\varepsilon}M_{t}x=A_{t}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M_{\varepsilon}x=A_{t}x$.

由此可见，对于一切$t>0$都有$M_{t}x\in\mathscr{D}(A)$，所以$\mathscr{D}(A)$在X空间内稠密，并且

(10) $AM_{t}x=A_{t}x\qquad(x\in X,t>0)$.

根据定义，$Q(s)$与$Q(t)$交换，因此A_{ε}与M_{t}交换．如果$x\in\mathscr{D}(A)$，那么（7）式蕴涵：$t>0$时

(11) $M_{t}Ax=M_{t}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_{\varepsilon}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M_{\varepsilon}A_{t}x=A_{t}x$.

现在，取点列$\{x_{n}\}\subset\mathscr{D}(A)$满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}=x$；$\lim\limits_{n\to\infty}Ax_{n}=y$。将此点列用于（11）式，可得$A_{t}x_{n}=M_{t}Ax_{n}$，再让$n\to\infty$求极限，就有$A_{t}x=M_{t}y$。既然$\lim\limits_{t\to 0}M_{t}y=y$，那么可以推知$x\in\mathscr{D}(A)$，以及$Ax=y$。所以$A$是闭算子。

（c）设$x\in\mathscr{D}(A)$。注意到对于一切$t>0,\varepsilon>0$，恒有$A_{\varepsilon}Q(t)x=Q(t)A_{\varepsilon}x$，因此

(12) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_{\varepsilon}Q(t)x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q(t)A_{\varepsilon}x=Q(t)\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_{\varepsilon}x$,

亦即

(13) $AQ(t)x=Q(t)Ax$；

且知$Q(t)x\in\mathscr{D}(A)$。如果用t乘（11）式的两端，将得到

$$tM_tAx=tA_tx,$$

也就是

(14) $$\int_0^t Q(s)Axds=Q(t)x-x.$$

因为在（a）中已经证明了被积函数的连续性，所以上述积分的导数必定是$Q(t)Ax$。连同（13）式，即知（c）已得证。

（d）如果$x\in\mathscr{D}(A)$，又$0<s<t$，利用结论（c）可以得到

$$\frac{d}{ds}[\exp\{(t-s)A_\varepsilon\}Q(s)x]=\exp\{(t-s)A_\varepsilon\}Q(s)(Ax-A_\varepsilon x).$$

但因

$$\exp\{(t-s)A_\varepsilon\}Q(s)x=\begin{cases}Q(t)x & \text{当 } s=t \text{ 时},\\ \exp(tA_\varepsilon)x & \text{当 } s=0 \text{ 时};\end{cases}$$

所以有

$$Q(t)x-\exp(tA_\varepsilon)x=\int_0^t \exp\{t-s)A_\varepsilon\}Q(s)(Ax-A_\varepsilon x)ds.$$

应用（4）式和（5）式，能够估计被积函数的范数不超过

$$\gamma\exp\{(t-s)\gamma\}\gamma^{1+t}\|Ax-A_\varepsilon x\|,$$

从而得知

(15) $$\|Q(t)x-\exp(tA_\varepsilon)x\|\leqslant K(t)\|Ax-A_\varepsilon x\|,$$

其中$K(t)$是$[0,\infty)$上的一个递增连续函数。

为了完成证明，选定$t_0>0$，定义

(16) $$s(t,\varepsilon)=Q(t)-\exp(tA_\varepsilon)\qquad(t>0,0<\varepsilon\leqslant1),$$

则由（4）式和（5）式可知，存在$K_0<\infty$，使得

(17) $$\|S(t,\varepsilon)\|\leqslant K_0\qquad(0\leqslant t\leqslant t_0,0<\varepsilon\leqslant1).$$

如果$x_0\in X$，又$\eta>0$，那么存在$x\in\mathscr{D}(A)$，使得

(18) $$\|x-x_0\|<\eta/K_0.$$

这时，对于$0\leqslant t\leqslant t_0$来说，由（15）～（18）诸式可以估计

$$\|S(t,\varepsilon)x_0\| \leqslant \|S(t,\varepsilon)x\| + \|S(t,\varepsilon)\| \, \|x-x_0\|$$
$$< K(t_0)\|Ax-A_\varepsilon x\| + \eta.$$

既然$x \in \mathscr{D}(A)$，那么不难看出，只要$\varepsilon>0$足够小，就能得到

(19) $$\|Q(t)x_0-\exp(tA_\varepsilon)x_0\|<2\eta \qquad (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

□

定理的结论（d）留下一个问题：如果想进一步得到指数表示式$Q(t)=\exp(tA)$，需要什么条件？以下两个定理给出了答案。

4.6.3 定理 设$\{Q(t)\}$是Banach空间X上的算子半群，并且满足连续性条件，那么下列三个条件当中的每一个都蕴涵其它两个：

(a) $\mathscr{D}(A)=X$；

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|Q(\varepsilon)-I\|=0$；

(c) $A\in\mathscr{B}(X)$以及$Q(t)=e^{tA}$ $\quad (0\leqslant t<\infty)$.

证 我们将沿用定义4.6.1和定理4.6.2中的记号。

当（a）成立时，Banach—Steinhaus定理蕴涵，对于一切足够小的$\varepsilon>0$，算子A_ε均为有界。按照定义$Q(\varepsilon)-I=\varepsilon A_\varepsilon$，立即得知（$b$）成立。

如果具备条件（b），那么$t\to 0$时将有$\|M_t-I\|\to 0$。选取$t>0$，让它足够小以使M_t在$\mathscr{B}(X)$内可逆。既然$M_tA_\varepsilon=A_tM_\varepsilon$，那么就有

(1) $$A_\varepsilon=(M_t)^{-1}A_tM_\varepsilon.$$

当$\varepsilon\to 0$时，由（1）式可以看出：第一，对于任何$x\in X$，$A_\varepsilon x$都是收敛的；这是因为$\varepsilon\to 0$时$M_\varepsilon x\to x$，以及$(M_t)^{-1}A_t\in\mathscr{B}(X)$，其次，$A=(M_t)^{-1}A_t$；第三，这时还有

(2) $$\|A_\varepsilon-A\|\leqslant\|(M_t)^{-1}A_t\|\,\|M_\varepsilon-I\|\to 0 \qquad (\varepsilon\to 0).$$

由于（2）蕴涵

(3) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\exp(tA_\varepsilon)-\exp(tA)\|=0 \qquad (0\leqslant t<\infty),$$

因此，只须引用定理4.6.2的结论（d）就得到$Q(t)=\exp(tA)$. 从而证明了（b）蕴涵（c）。

至于（c）蕴涵（a），是显而易见的。 □

请读者注意，下述最后一个定理的背景又转变为Hilbert空间。

4.6.4 定理 如果Hilbert空间H上定义的算子半群$\{Q(t)\}$满足连续性条件，并且这些$Q(t)$都是正规算子，那么$\{Q(t)\}$的无穷小生成算子A将是H空间内的一个正规算子；并且存在这样的数$\gamma<\infty$，使得每个$\lambda\in\sigma(A)$都符合条件$\mathrm{Re}\lambda\leqslant\gamma$；还有

（1） $Q(t)=e^{tA}$ $(0\leqslant t<\infty)$.

作为特款，如果各个$Q(t)$都是酉算子，那么H空间内将有一个自伴算子S，使得

（2） $Q(t)=e^{itS}$ $(0\leqslant t<\infty)$.

（2）式所给出酉算子半群的表示，是M.H.Stone的一个经典性定理.

证 由于各个$Q(s)$，$Q(t)$交换，按照定理3.1.16，$Q(s)$与$Q(t)^*$也交换。因此，$\mathscr{B}(H)$内含有全体$Q(t)$与全体$Q(t)^*$的最小闭子代数将是正规代数。设这个子代数的极大理想空间为$\triangle$，它所对应的单位分解为E（参看定理3.3.1）.

将$Q(t)$与A_ε的Гельфанд变式分别记作f_t与a_ε，这时就有

（3） $a_\varepsilon=\dfrac{f_\varepsilon-1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

因为$f_{2\varepsilon}=(f_\varepsilon)^2$，经过简单的计算即可得到

（4） $a_{2\varepsilon}-a_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{2}(a_\varepsilon)^2$.

我们在$\triangle$上定义一个函数$b(p)$：在极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2^{-n}}(p)$存在的那些点$p\in\triangle$，取值

（5） $b(p)=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2^{-n}}(p)$；

而在其它的点$p\in\triangle$，则取值$b(p)=0$。这个$b(p)$是$\triangle$上的一个复Borel函数。然后，按照定理4.4.2，可以置$B=\psi(b)$，其定

义域为

$$(6)\qquad \mathscr{D}(B)=\{x\in H:\int_\triangle |b|^2dE_{x,x}<\infty\}.$$

这样的，B是H空间内的一个正规算子。

下面来证明$A=B$。

如果$x\in\mathscr{D}(A)$，那么$\varepsilon\longrightarrow 0$时$\|A_\varepsilon x\|$有界。因此存在$c_x<\infty$，使

$$(7)\qquad \int_\triangle |a_\varepsilon|^2dE_{x,x}=\|A_\varepsilon x\|^2\leqslant c_x \qquad (0<\varepsilon\leqslant 1)$$

成立，进而由（4）式可得

$$(8)\qquad \int_\triangle |a_{2\varepsilon}-a_\varepsilon|dE_{x,x}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}c_x \qquad (0<\varepsilon\leqslant 1).$$

在（8）式中取$\varepsilon=2^{-n}(n=1,2,\cdots)$，并且对不等式的两端分别求和，将能推知

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2^{-n+1}}-a_{2^{-n}}|<\infty \qquad \text{a.e.}[E_{x,x}].$$

于是极限（5）a.e.$[E_{x,x}]$存在，实变函数论中的 Fatou 引理与（7）式蕴涵

$$(10)\qquad \int|b|^2dE_{x,x}\leqslant c_x.$$

所以$\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(B)$。

求证定理 4.6.2 的过程中提到的公式（5）表明，$0<\varepsilon\leqslant 1$时有$\|\exp(A_\varepsilon)\|\leqslant\gamma_1<\infty$，这个$\gamma_1$取决于$\{Q(t)\}$。由于 Гельфанд 变式是$C^*$-代数上的一个等距，因而任何$p\in\triangle$都有$|\exp a_\varepsilon(p)|\leqslant\gamma_1$.现在由$b(p)$,的定义可知,任何$p\in\triangle$都有$|\exp b(p)|\leqslant\gamma_1$。因此存在$\gamma<\infty$，使得

$$(11)\qquad \operatorname{Re} b(p)\leqslant\gamma \qquad (p\in\triangle).$$

对于每个$x\in\mathscr{D}(A)$和任意$t\geqslant 0$来说，当$\varepsilon\longrightarrow 0$（譬如用数列$\{2^{-n}\}$的方式）时，

(12) $$\|\exp(tA_\varepsilon)x-\exp(tB)x\|^2$$
$$=\int_\triangle |\exp(ta_\varepsilon)-\exp(tb)|^2 dE_{x,x}$$

将趋于0；这是因为，被积函数可以取 $4\gamma_1^{2t}$ 为上界，它的极限等于0 a.e.$[E_{x,x}]$。于是，定理4.6.2的（d）蕴涵

(13) $$Q(t)x=e^{tB}x \qquad (x\in\mathscr{D}(A))。$$

由于 e^{tb} 是△上的一个有界函数，因而 $e^{tB}\in\mathscr{B}(H)$；注意到（13）式表明两个连续算子 $Q(t)$ 与 e^{tB} 在稠密集 $\mathscr{D}(A)$ 上重合，因此我们能够肯定

(14) $$Q(t)=e^{tB} \qquad (0\leqslant t<\infty)。$$

应用（14）式写出

(15) $$A_\varepsilon x-Bx=\left(\frac{e^{\varepsilon B}-I}{\varepsilon}-B\right)x,$$

则有

(16) $$\|A_\varepsilon x-Bx\|^2=\int_\triangle\left|\frac{e^{\varepsilon b}-1}{\varepsilon}-b\right|^2 dE_{x,x}。$$

$\varepsilon\to0$时，（16）式中的被积函数在△的每个点上都将趋于0。由于在任何半平面 $\{z:\mathrm{Re}\,z\leqslant c\}$，函数 $|(e^z-1)/z|$ 均为有界；又因（16）式中的被积函数还能写成以下形式

$$\left|\frac{e^{\varepsilon b}-1}{\varepsilon b}\right||b|^2,$$

所以由（11）式和控制收敛定理可以得到：当 $x\in\mathscr{D}(B)$ 时，将有

(17) $$\lim_{\varepsilon\to0}\|A_\varepsilon x-Bx\|^2=0。$$

这意味着证明了 $\mathscr{D}(B)\subset\mathscr{D}(A)$ 以及 $A=B$。

接着，由（11）式和定理4.4.4的（c）即可得知，$\sigma(A)$ 的实部是上有界的。

定理的求证工作已接近完成，只剩下酉算子半群的特款。实际上，如果每个 $Q(t)$ 都是酉算子，那么将有 $|f_\varepsilon|=1$；这时（3）式表明：在 $\lim_{\varepsilon\to0}a_\varepsilon$ 存在的各点，这个极限值应当是纯虚数；因而

任何点$p\in\triangle$处的$b(p)$都是纯虚数。若是记$S=-iB$，则（14）式将化为（2）式，而定理4.4.2的（c）将保证这个S是自伴算子。 □

关于定理4.6.4，还有两点注释。

1．虽然$\mathscr{D}(A)$可能是H的一个真子空间，但是，e^{tA}却定义在整个H空间，并且有界。

为了说明这一事实，先设E^A是A的谱分解(参看定理4.5.4)；然后，注意到任何$\lambda\in\sigma(A)$都有$|e^{t\lambda}|\leqslant e^{t\gamma}$；于是我们可以利用曾经在§3.3.3中描述过的符号运算来定义有界算子e^{tA}为

$$(18)\qquad e^{tA}=\int_{\sigma(A)}e^{t\lambda}dE^A(\lambda)\qquad(0\leqslant t<\infty).$$

2．定理有一个很容易证明的逆命题：如果算子A具有定理结论中所说的那些性质，那么（1）式显然定义了一个正规算子半群，并且满足连续性条件。

$\{Q(t)\}$是正规算子半群的验证工作非常简单，故从略。至于连续性条件，当$t\to0$时，由控制收敛定理即可得出

$$(19)\qquad \|Q(t)x-x\|^2=\int_{\sigma(A)}|e^{t\lambda}-1|^2dE^A_{x,x}(\lambda)\to0.$$

习　题

以下各个习题中，字母H仍表示Hilbert空间，除非另作声明。

1．对无界算子求证结合律$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$。再证$T_1\subset T_2$蕴涵$ST_1\subset ST_2$和$T_1S\subset T_2S$。

2．设T是H空间内的一个稠密定义的算子．试证，T具有闭扩张当且仅当$\mathscr{D}(T^*)$在H内稠密．然后，进一步求证T^{**}就是T的一个扩张。

3．由定理4.2.2的（a）可知：H空间内稠密定义的算子T的$\mathscr{D}(T^*)=\{0\}$，当且仅当$\mathscr{G}(T)$在$H\times H$内稠密。指出确有这样的实例。

4．如果T是一个在H空间内稠密定义的闭算子，并且$T^*T\subset TT^*$；试问，能否由此判定T是正规算子？

5．假定H空间内稠密定义的算子T在任何$x\in\mathscr{D}(T)$处都有$(Tx,x)=0$，试问，能否由此判定T在任何$x\in\mathscr{D}(T)$处都有$Tx=0$？

6．对H空间内的算子T定义

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in\mathscr{D}(T):Tx=0\}$$

试证，如果$\mathscr{D}(T)$稠密，那么

$$\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp}\cap\mathscr{D}(T^*).$$

再证，如果T又是闭算子，那么

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^*)^{\perp}\cap\mathscr{D}(T).$$

这样就推广了定理3.1.10.

7．讨论以下三个边值问题．微分方程是

$$f''-f=g,$$

其中$g\in L^2([0,1])$为已知函数，边值条件分别是

(i) $f(0)=f(1)=0$;

(ii) $f'(0)=f'(1)=0$;

(iii) $f(0)=f(1)$ 和 $f'(0)=f'(1)$。

试证：上述三个问题，每一个都各有其唯一解f，而f'是绝对连续函数并且$f''\in L^2([0,1])$。

提示：将§4.1.4的例1与定理4.2.5结合起来考虑。

此外，还可以求出问题的显式解来证明。

8．(*a*) 试证$L^2(\boldsymbol{R})$空间内的算子T的自伴性，它由$Tf=if$定义，$\mathscr{D}(T)$由所有绝对连续函数$f\in L^2$当中能使$f'\in L^2$的组成。

提示：读者可能需要证明，每个$f\in\mathscr{D}(T)$在$t\to\pm\infty$时都有$f(t)\to0$．或进一步求证，每个$f\in\mathscr{D}(T)$都是一个L^1—函数的Fourier变换。

(*b*) 指定$g\in L^2(\boldsymbol{R})$。利用定理4.2.5求证方程

$$f''-f=g$$

有唯一的绝对连续解$f\in L^2$，其$f'\in L^2$，$f''\in L^2$，并且f'绝对连续。

此外，借助直接计算，再证

$$f(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t-x}g(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}e^{x-t}g(t)dt.$$

这个解还能用Fourier变换求得。

9．设H^2为所有全纯函数$f(z)=\sum a_n z^n$组成的空间，这些函数定义在开的单位圆盘内，并且满足条件

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<\infty.$$

求证H^2是一个Hilbert 空间，它通过一一对应$f\leftrightarrow\{c_n\}$而同构于l^2。

以$(Vf)(z)=zf(z)$ 定义$V\in\mathscr{B}(H^2)$。求证V是H^2空间内的对称算子T的Cayley变换，T的定义由下式

$$(Tf)(z)=i\frac{1+z}{1-z}f(z)$$

给出，求$T+iI$与$T-iI$的值域，然后指出其中一个是H^2，而另一个的余维数等于1．

（可与例4.3.7做比较）

10．继续讨论习题9的H^2空间．现在定义V为

$$(Vf)(z)=zf(z^2).$$

试证V作为H^2内的一个闭的对称算子T的Cayley变换，是一个等距；T的两个亏指数是0和∞。

11．(a)按照定理4.4.2中的叙述去理解，算子$\phi(f+g)$与$\Psi(f)+\Psi(g)$之间是什么关系？

(b) 设f与g可测，并且g是有界函数，试证$\phi(g)$将$\mathscr{D}_f$映入$\mathscr{D}_f$。

(c) 试证：$\phi(f)=\phi(g)$ 当且仅当$f=g$ a. e. $[E]$，亦即，当且仅当$E(\{p: f(p)\neq g(p)\})=0$．

12。试问在求证定理4.5.4的过程中出现的算子C是正规算子吗？

13。试证H空间内的任意正规算子N，无论有界与否，都有一个极分解

$$N=UP=PU,$$

其中U是酉算子；P是自伴算子，并且$P\geqslant 0$，此外，还有$\mathscr{D}(P)=\mathscr{D}(N)$。

14。定理3.1.16可以推广为：设$T\in\mathscr{B}(H)$，M与N是H空间内的正规算子；如果$TM\subset NT$，那么$TM^*\subset N^*T$。试证之。

15。设T是H空间内的一个闭算子，$\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}(T^*)$，并且任何$x\in\mathscr{D}(T)$都有$\|Tx\|=\|T^*x\|$。试证$T$是正规算子。

提示：先证明$x\in\mathscr{D}(T)$，$y\in\mathscr{D}(T)$时恒有$(Tx,Ty)=(T^*x,T^*y)$。

16。求证H空间内任何算子T的谱$\sigma(T)$必定是$\mathbf{C}$的一个闭子集。

提示：如果$ST\subset TS=I$，又有$S\in\mathscr{B}(H)$，那么当$|\lambda|$足够小时，$S(I-\lambda S)^{-1}$将是$T-\lambda I$的一个有界逆算子。

17。置$\phi(t)=\exp(-t^2)$。设$L^2=L^2(\mathbf{R})$，定义$S\in\mathscr{B}(L^2)$为

$$(Sf)(t)=\phi(t)f(t-1)\qquad(f\in L^2),$$

因而有$(S^2f)(t)=\phi(t)\phi(t-1)f(t-2)$，等等。

求出S^*。计算

$$\|S^n\|=\exp\left\{-\frac{(n-1)n(n+1)}{12}\right\}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

得出S是一对一的，$\mathscr{R}(S)$在L^2内稠密，以及$\sigma(S)=\{0\}$等结论。

定义算子T为

$$TSf=f\qquad(f\in L^2),$$

$\mathscr{D}(T)=\mathscr{R}(S)$。然后证明$\sigma(T)$为空集。

18。继续讨论§4.1.4的例1中的T_1，T_2和T_3。置

$$\mathscr{D}(T_4)=\{f\in\mathscr{D}(T_1):f(0)=0\},$$

并且定义$T_4 f=if'$于所有的$f\in\mathscr{D}(T_4)$。

求证以下事实：

(a) 任何$\lambda\in\boldsymbol{C}$都在T_1的点谱之中；

(b) $\sigma(T_2)$ 由形如$2\pi n$的数组成，n将历遍整数集；每个$2n\pi$都在T_2的点谱内；

(c) 对于各个$\lambda\in\boldsymbol{C}$来说，子空间$\mathscr{R}(T_3-\lambda I)$的余维数是1；因此$\sigma(T_3)=\boldsymbol{C}$，$T_3$的点谱为空集。

(d) $\sigma(T_4)$ 是空集。

提示：研究微分方程$if'-\lambda f=g$。

19. 设$\dim H=\infty$，试证$\boldsymbol{C}$的任何非空闭子集都是某个正规算子的谱。

20. 设$f\in H^2$（参看习题9），$f(z)=\sum c_n z^n$，定义

$$[Q(t)f](z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-t}c_n z^n \qquad (0\leqslant t<\infty).$$

试证各个$Q(t)$都是正的自伴算子。求出算子半群$\{Q(t)\}$的无穷小生成算子A，试问A是否自伴？试证A有纯点谱，各点为$\log 1$，$\log(1/2)$，$\log(1/3)$，…。

附录

A.1 测度与积分的抽象表述

A.1.1 定义

1．如果集X的子集族τ满足以下三个条件

（i）$\varnothing\in\tau$，$X\in\tau$；

（ii）若$V_i\in\tau$（$i=1,2,\cdots,n$)）则$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\tau$；

（iii）若$\{V_\alpha\}$是τ的元素的任何集族（有限，可列或不可列），则$\bigcup\limits_\alpha V_\alpha\in\tau$；

那么τ称为X上的一个**拓扑**。

2．如果集X有一个拓扑τ，那么X连同τ可以称为**拓扑空间**，记作(X,τ)。这时τ的元素称为X的**开集**。

当所讨论的集X成为拓扑空间（X，τ）之后，只涉及同一个拓扑τ时，拓扑空间的符号（X，τ）可以简单地用X代替。

3．设X，Y都是拓扑空间，f是X到Y内的一个映射。如果Y的每个开集V所对应的$f^{-1}(V)$也是X的开集，那么f称为**连续的**。

最为人熟知的拓扑空间是**度量空间**，其中定义了**距离**。可以用距离来引进拓扑，如在R与R^2上用距离建立**邻域**概念然后定义开集，从而得到所谓**通常的拓扑**。

A.1.2 定义

1．如果集X的子集族$\mathfrak{M}$满足以下三个条件

（i）$X\in\mathfrak{M}$；

（ii）若$A\in\mathfrak{M}$，则$\mathscr{C}A\in\mathfrak{M}$，其中$\mathscr{C}A$是$A$关于$X$的余集；

(iii) 若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，其中诸$A_n\in\mathfrak{M}$，则$A\in\mathfrak{M}$；

那么$\mathfrak{M}$称为X的一个**σ-代数**.

2．如果集X有一个σ-代数$\mathfrak{M}$，那么X连同$\mathfrak{M}$可以称为**可测空间**，记作$(X,\mathfrak{M})$．这时$\mathfrak{M}$的元素称为X的**可测集**.当不致引起误会时，$(X,\mathfrak{M})$可以简写为X.

3．设X是可测空间，Y是拓扑空间，f是X到Y内的一个映射．如果Y的每个开集V所对应的$f^{-1}(V)$都是X的可测集，那么f称为**可测的**.

A.1.3 定理 如果$\mathscr{F}$是集X的任意子集族，那么X内存在一个最小的σ-代数$\mathfrak{M}^*$，使得$\mathscr{F}\subset\mathfrak{M}^*$.

上述$\mathfrak{M}^*$可以称为**由$\mathscr{F}$生成的σ-代数**.

推论 拓扑空间X内存在一个最小的σ-代数$\mathscr{B}$，使得X内的每一个开集都属于$\mathscr{B}$.

A.1.4 定义 设X为拓扑空间，定理A.1.3的推论中提到的最小的σ-代数$\mathscr{B}$的元素称为X的**Borel集**.

显然，**闭集**（余集是开集的集）也是Borel集，而且闭集的可列并与开集的可列交都是Borel集．后两种类型的集将分别记作**F_σ集**与**G_δ集**，它们有重要的作用.

因为$\mathscr{B}$是σ-代数，所以$(X,\mathscr{B})$**能够视为可测空间**，而**Borel集则扮演可测集的角色**.

设Y是拓扑空间，f是$(X,\mathscr{B})$到Y内的一个映射．如果Y的每个开集V所对应的$f^{-1}(V)\in\mathscr{B}$，那么f称为**Borel可测的**.

显然，连续映射是Borel可测的.

Borel可测映射可简称为**Borel映射**或**Borel函数**.

A.1.5 定义

1．所谓**测度**，就是定义在σ-代数$\mathfrak{M}$上的一个函数μ，它具有可列可加性，即，如果$\{A_i\}$是$\mathfrak{M}$中互不相交的可列个集，那么

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

当μ的值域为$[0,\infty]$，意即$(0,\infty)\cup\{0\}\cup\{\infty\}$时，特称为**正测度**，或简称为测度。由于允许$\mu(E)=\infty$，为了能够进行计算，需约定$0\cdot\infty=0$。

当μ的值域在C内时，特称为**复测度**。

2．所谓**测度空间**，就是一个可测空间并且具有定义在其可测集的σ-代数上的正测度，因此应当记作（X，$\mathfrak{M}$，μ）。为了简化，也可只写X。

测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ）如能满足条件$\mu(X)=1$，则称为**概率空间**；定义在概率空间上的测度μ称为概率测度。

以上定义的测度，具有通常在实变函数论中就$\boldsymbol{R}$上的集所定义的Lebesgue测度的全部性质。但是，复测度将不考虑单调性。

A.1.6 定义

设$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$是测度空间（$X$，$\mathfrak{M}$，$\mu$）上的可测简单函数，亦即，$\chi_{A_i}$是集$A_i$的特征函数；诸$\alpha_i$取实数值并且彼此不同。**$s$在$E\in\mathfrak{M}$上的Lebesgue积分**定义为

$$\int_E s d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E).$$

进而，当$f:X\to[0,\infty]$是可测函数时，**f在$E\in\mathfrak{M}$上的Lebesgue积分**定义为

$$\int_E f d\mu=\sup\int_E s d\mu,$$

记号sup意味着取遍所有使得$0\leqslant s\leqslant f$的可测简单函数s而得到的上确界。

以上定义的积分同样地具有曾在实变函数论中讨论过的$\boldsymbol{R}$内可测集上的Lebesgue积分的各种性质，特别是有重要的Lebesgue单调收敛定理和Fatou引理。

A.1.7 定义

将测度空间（X, $\mathfrak{M}$, μ）上的复可测函数当中，凡是能够满足条件$\int_X |f|d\mu<\infty$的那些f组成的集记作$L^1(\mu)$。

当$f\in L^1(\mu)$时，如果$f=u+iv$，其中u和v是X上的实可测函数，再将u和v的正部和负部分别记作u^+，u^-；v^+，v^-；则可定义复可测函数f在可测集E上的Lebesgue积分为

$$\int_E f d\mu=\int_E u^+ d\mu-\int_E u^- d\mu+i\int_E v^+ d\mu-i\int_E v^- d\mu.$$

$L^1(\mu)$的元素称为**关于μ为Lebesgue可积的函数**。

上述积分具有线性，可加性；还有

$$\left|\int_E f d\mu\right|\leqslant\int_E |f| d\mu\quad ;$$

以及在实变函数论中研究过的Lebesgue控制收敛定理。

A.2 拓扑空间·Hausdorff空间

A.2.1 定义

设X是拓扑空间。

1．集$E\subset X$称为**闭集**，如果它的余集$\mathscr{C}E$是开集。

2．所谓集$E\subset X$的**闭包**$\bar{E}$，乃是X中包含E的最小闭集。

3．集$K\subset X$称为**紧的**，如果K的任何开复覆都有有限子复盖，也就是说：如果$\{V_\alpha\}$是开集的集族，且$K\subset\bigcup_\alpha V_\alpha$，那么$\{V_\alpha\}$的某个有限子族的并仍能包含$K$。

特别是，如果X本身是紧的，则X称为**紧空间**。

4．所谓点$p\in X$的一个**邻域**$U(p)$，乃是X的任一含有点p的开集。

5．X称为**Hausdorff空间**，如果下述条件成立：若$p\in X$，$q\in X$，且$p\neq q$；则p有一个邻域U，q有一个邻域V，使得$U\cap V=\varnothing$。

度量空间是人们最熟悉的一类Hausdorff空间。

6．如果X的任何点都能有一个这样的邻域，它的闭包是紧的，那么X称为**局部紧空间**。

显然，紧空间也是局部紧空间。

回顾分析学中著名的Heine—Borel定理：欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧的子集正是那些闭的而又有界的集。立即可知：$\boldsymbol{R}^n$ 是局部紧Hausdorff空间。

A.2.2 定义

拓扑群乃是一个拓扑空间，同时又是一个群，并且其中群的运算是连续的。

所谓群的运算的连续性意味着，对于任何元x，y来说：

（i）如果W是xy的一个邻域，那么分别存在x与y的邻域U与V，当$u\in U$，$v\in V$时必定$uv\in W$；

(ii) 如果V是x^{-1}(x的逆元）的任一邻域，那么x有一个这样的邻域U，只要$u\in U$，必定$u^{-1}\in V$。

A.2.3 定理 在拓扑空间X中，设K是紧的，F是闭集。如果$F\subset K$，那么F也是紧的。

A.2.4 定理 设X为Hausdorff 空间，$K\subset X$，K是紧的，且$p\in\mathscr{C}K$。这时存在开集U和W，使得$p\in U$，$K\subset W$，并且$U\cap W=\varnothing$。

推论1 Hausdorff空间内紧的子集均为闭集。

推论2 在Hausdorff空间中，如果F是闭集，K是紧的，那么$F\cap K$是紧的。

A.2.5 定理 设U是局部紧Hausdorff空间X内的开集，$K\subset U$，K是紧的。这时存在一个具有紧闭包的开集V，使得

$$K\subset V\subset\bar{V}\subset U.$$

A.2.6 定理

所谓拓扑空间X上的复函数f的**支集**，乃是集

$$\{x:f(x)\neq 0\}$$

的闭包。

将X上其支集是紧的所有连续复函数组成的集记作$C_c(X)$，它是一个向量空间。

A.2.7 定理 设X和Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是连续的。如果K是X的紧子集，那么$f(K)$也是紧的。

推论 任何$f\in C_c(X)$的值域均为$\boldsymbol{C}$的一个紧子集。

A.2.8 Урысон引理 设X是局部紧Housdorff 空间，V是X内的开集，$K\subset V$，而K是紧的。这时，存在一个$f\in C_c(X)$，它满足不等式

$$\chi_K\leqslant f\leqslant\chi_V.$$

A.2.9 Riesz表示定理 设X是局部紧 Hausdorff 空间，Λ是$C_c(X)$上的正线性泛函。这时，在X内存在一个包含了X的所有Borel 集的σ-代数$\mathfrak{M}$，并且存在$\mathfrak{M}$上唯一的正测度μ，使得每个$f\in C_c(X)$都有

$$\Lambda f=\int_X fd\mu.$$

A.2.10 Borel测度的正则性

定义在局部紧 Hausdorff 空间X的全体 Borel 集所组成的σ-代数$\mathfrak{M}$上的测度μ称为**X上的Borel测度**。

如果μ是正的，并且每个$E\in\mathfrak{M}$，有

$$\mu(E)=\inf\{\mu(V):E\subset V,\ V\text{是开集}\},$$

那么E**称为外正则的**。

如果μ是正的，并且每个开集E和每个$E\in\mathfrak{M}$而$\mu(E)<\infty$，有

$$\mu(E)=\sup\{\mu(K):K\subset E,\ K\text{是紧集}\},$$

那么E**称为内正则的**。

如果X内的任何 Borel 集既是外正则的，又是内正则的，就将μ**称为正则Borel测度**。

A.3 Radon—Nikodym定理

A.3.1 定义

设μ是σ-代数$\mathfrak{M}$上的正测度，λ是$\mathfrak{M}$上的一个任意测度，意

即λ可以是正测度或复测度。

如果 $\lambda(E)=0$ 对于每一个$\mu(E)=0$ 的 $E\in\mathfrak{M}$成立，我们就说λ**关于**μ**绝对连续**，记作 $\lambda\ll\mu$。

如果存在一个集$A\in\mathfrak{M}$，使得 $\lambda(E)=\lambda(A\cap E)$ 对每一个$E\in\mathfrak{M}$成立，我们就说λ**集中在**A**上**。

如果 λ_1 和 λ_2 都是$\mathfrak{M}$上的测度，而且存在一对彼此不相交的集A和B，使得λ_1集中在A上，而λ_2集中在B上，这时我们说λ_1 和λ_2是**互相奇异的**，记作$\lambda_1\perp\lambda_2$。

A.3.2 Lebesgue—Radon—Nikodym定理

设μ, λ是集X的σ-代数$\mathfrak{M}$上的正有界测度。这时

(*a*) 在$\mathfrak{M}$上存在唯一的一对互相奇异的正测度 λ_a和λ_s，使得

$$\lambda=\lambda_a+\lambda_s,\quad \lambda_a\ll\mu,\quad \lambda_s\perp\mu;$$

(*b*) 存在唯一的$h\in L^1(\mu)$，使得

$$\lambda_a(E)=\int_E hd\mu \qquad (E\in\mathfrak{M}).$$

(*a*) 中提到的那一对测度（λ_a, λ_s）称为λ**关于**μ**的Lebesgue分解**。

(*b*) 即是著名的**Radon—Nikodym定理**。

A.3.3 Radon—Nikodym定理的推论

设 μ 是 X 的 σ-代数$\mathfrak{M}$上的复测度。这时存在一个可测函数h，使得$|h(x)|=1$对所有的$x\in X$成立，并且有

$$d\mu=hd|\mu|.$$

A.4 线性算子的几个重要定理

A.4.1 Banach—Steinhaus 定理

设X是Banach空间，Y是赋范线性空间；$\{T_\alpha\}$是X到Y的一族有界线性算子，其中α取值于某个指标集A。

这时，或者存在$M<\infty$，使得每个$\alpha\in A$都有

(1) $$\|T_\alpha\|\leqslant M;$$

或者对于所有属于X的某个稠密G_δ集的x，有

(2) $$\sup \| T_a x \| = \infty.$$

A.4.2 逆算子定理

设X，Y是Banach 空间，T是X到Y上的一个一对一的有界线性算子。这时T的逆算子T^{-1}必是有界算子。

A.4.3 Banach开映射定理

设X，Y是Banach空间，T是X到Y上的一个有界线性算子。这时T将X的每一个开集都映射成Y的开集。

A.4.4 闭图象定理

设X，Y是Banach空间，T是定义在X上而值域在Y内的线性算子。如果T是闭算子，那么T将是有界算子。

A.5 其 它

A.5.1 Mergelyan 定理

设K是平面内的紧集，它的余集是连通的；f是在K上连续，并且在K的内部全纯的复函数。这时，任给$\varepsilon > 0$，必定存在多项式P，对于任何$z \in K$都有$|f(z) - P(z)| < \varepsilon$。

参 考 文 献

〔1〕 关肇直、田方增，赋范环论．数学进展，第1卷第1， 2期，科学出版社，1955.

〔2〕 关肇直，泛函分析讲义．高等教育出版社，1958.

〔3〕 关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门．上海科学技术出版社，1979.

〔4〕 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌，实变函数论与泛函分析．高等教育出版社，第2版，1984.

〔5〕 夏道行、舒五昌、严绍宗、童裕孙，泛函分析第二教程．高等教育出版社，1987.

〔6〕 孙永生，泛函分析讲义．北京师范大学出版社，1986.

〔7〕 R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press, Inc. 1972.

〔8〕 P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book. D. Van Nostrand Company, Inc. 1967.

〔9〕 L. H. Loomis, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. D. Van Nostrand Company, Inc. 1953.

〔10〕 I. J. Maddox, Elements. of Functional Analysis. Cambridge University Press. 1970. （有中译本）

〔11〕 M. A. Naimark, Normed Rings. Erven P. Noordhoff, Ltd. 1964.

〔12〕 C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras. D. Van Noostrand Company, Inc. 1960.

〔13〕 F. Riesz, B. SZ—Nagy, Functional Analysis. Frederick Ungar Publishing Co. 1955. （有中译本）

〔14〕 W. Rudin, Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1966. （有中译本）

〔15〕 W. Rudin, Functional Analysis. McGraw-HillBook Company, Inc. 1973.

〔16〕 A. E. Taylor, D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1980.

[General Information]

[illegible]=BANACH[illegible]

[illegible]=[illegible]

[illegible]=208

SS[illegible]=10069818

DX[illegible]=

[illegible]=1991[illegible]01[illegible]1[illegible]

[illegible]=[illegible]